

Travaux Pratiques d'Acoustique

L2 PHY 234

Eric Liatard
UJF/LPSC, 53 Avenue des Martyrs
liatard@lpsc.in2p3.fr

Table des matières

1	LES ONDES SONORES	5
1.1	Généralités et rappels	5
1.2	Niveaux d'intensité acoustique	6
1.3	Exercices	7
2	ANALYSE DES SONS	9
2.1	Analyse de Fourier	9
2.2	Notions d'acoustique musicale	11
2.3	Exercices	15
3	CORDE VIBRANTE	17
3.1	Ondes stationnaires	17
3.2	Etude d'une corde vibrante	18
3.3	Quelques notions sur les systèmes vibrants non-harmoniques	22
3.4	Exercices	23
4	ELECTRO-ACOUSTIQUE	25
4.1	Rappels sur les dipôles électrocinétiques	25
4.2	Electrocinétique en régime variable	30
4.3	Dipôles en régime sinusoïdale	32
4.4	Quadripôles	33
4.5	Les réponses non linéaires	37
4.6	Le haut-parleur électrodynamique	37
4.7	Exercices	42
5	NOTIONS D'ACOUSTIQUE DES SALLES	43
5.1	Introduction	43
5.2	Propagation du son en champ libre	43
5.3	Propagation du son dans une salle	43
5.4	Le temps de réverbération	44
5.5	La formule de Sabine	45
A	Rappels sur les calculs d'incertitudes	47
A.1	Définitions	47
A.2	Propagation par une formule	48

Chapitre 1

LES ONDES SONORES

1.1 Généralités et rappels

L'acoustique est la science de la production, de la propagation, de la détection et des effets produits par les ondes sonores. Un aperçu des ramifications de l'acoustique dans le domaine des sciences et des arts est donné figure 1.1.

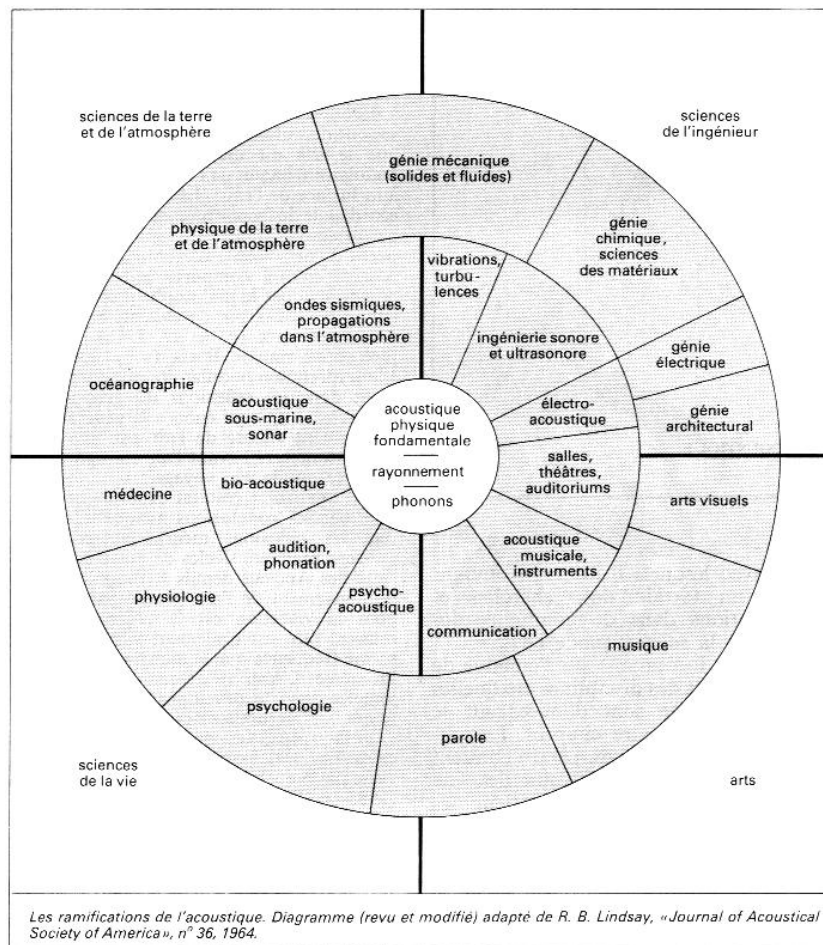


FIG. 1.1 – Les ramifications de l'acoustique dans le domaine des sciences et des arts.

La production et la propagation d'ondes sonores sont liées à l'existence d'un mouvement vibratoire (source de l'onde) et d'un milieu élastiquement déformable pour que l'onde puisse se propager. Les ondes sonores sont des ondes mécaniques dont les propriétés sont décrites dans le chapitre 2 du cours de Phy231.

1.2 Niveaux d'intensité acoustique

1.2.1 Perception du son par le système auditif

La sensation sonore dépend des caractéristiques physiques des sons. Un son d'intensité trop faible n'est pas perçu, tandis qu'un son trop fort peut provoquer une douleur, voire une destruction de l'appareil auditif. Il existe donc des limites d'intensité en dehors desquelles l'écoute est impossible. De plus, ces limites dépendent fortement de la hauteur ou fréquence des sons : les fréquences trop basses (infrasons) de même que les fréquences trop élevées (ultrasons) ne sont pas perçues. Pour une "oreille moyenne", les courbes du seuil d'audition et du seuil intolérable sont représentées en fonction de la fréquence sur la figure 1.2 (résultat de l'examen d'un grand nombre de sujets "acoustiquement normaux" entre 18 et 25 ans).

On peut voir sur ces courbes qu'il existe entre les surpressions p comprises entre le seuil d'audition et le seuil intolérable pour l'oreille humaine un rapport $p_{max}/p_{min} \approx 10^7$. La gamme de variation de la pression acoustique est donc très grande, bien que p reste toujours très inférieure à la pression atmosphérique : $p(x, t) \ll P_{atm} = 10^5$ Pa.

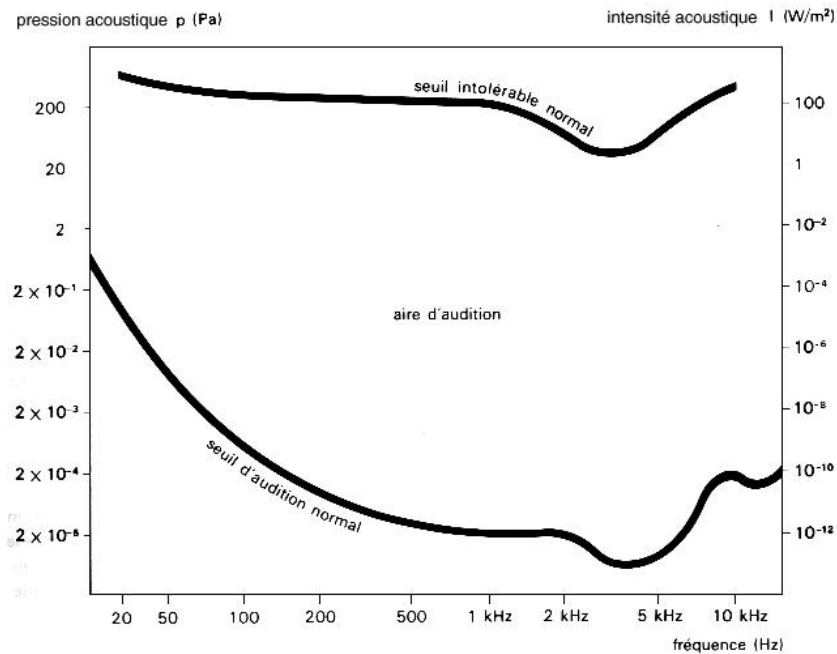


FIG. 1.2 – Courbes du seuil d'audition et du seuil intolérable pour l'oreille humaine.

1.2.2 Niveau physique d'intensité

L'intensité étant proportionnelle au carré de la pression, il en résulte que la gamme des intensités audibles s'étend sur 14 décades : $I_{max}/I_{min} \approx 10^{14}$!

En fait, notre système auditif éprouve, approximativement, la même impression de croissance lorsque l'intensité physique varie de 1 à 10 ou de 100 à 1000 par exemple. Ceci se traduit par la "loi de Weber-Fechner" qui dit que "la sensation croît à peu près comme le logarithme de l'excitation".

C'est pourquoi on choisit de mesurer les intensités sur une échelle logarithmique, en **décibels**. On parle alors du **niveau physique d'intensité acoustique** L_{dB} :

$$L_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 20 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (1.1)$$

Où $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ et $p_0 = 2.10^{-5} Pa$ sont respectivement des intensité et pression de référence. Attention : il s'agit ici du logarithme décimal.

Niveau d'intensité (dB)	Source sonore	Intensité (W/m^2)	Pression (Pa)	Déplacement (m) pour $f = 1000 \text{ Hz}$
140	Seuil intolérable.	100	200	72×10^{-6}
120	Réacteur d'avion à 10 m.	1	20	7.2×10^{-6}
100	Marteau-piqueur à 2 m.	10^{-2}	2	0.72×10^{-6}
80	Rue bruyante.	10^{-4}	0.2	72×10^{-9}
60	Conversation vive.	10^{-6}	2×10^{-2}	7.2×10^{-9}
40	Conversation normale.	10^{-8}	2×10^{-3}	0.72×10^{-9}
20	Studio d'enregistrement.	10^{-10}	2×10^{-4}	72×10^{-12}
10	Laboratoire d'acoustique.	10^{-11}	6×10^{-5}	22×10^{-12}
0	Seuil d'audition.	10^{-12}	2×10^{-5}	7.2×10^{-12}

TAB. 1.1 – Ordre de grandeur de quelques niveaux sonores.

Lorsque le niveau sonore varie au cours du temps on peut définir un **niveau équivalent** qui correspond à la moyenne de l'énergie pendant l'intervalle de temps ΔT :

$$L_{eq} = 10 \log \frac{1}{T} \int_0^{\Delta T} \frac{I}{I_0} dt \quad (1.2)$$

Le tableau 1.1 donne l'ordre de grandeur de quelques niveaux sonores ainsi que les amplitudes de déplacement de l'air pour le cas d'un son sinusoïdal de 1000 Hz (relation ??). On notera les très faibles amplitudes de déplacement de l'air, en particulier au seuil d'audition où ce déplacement est nettement inférieur à la taille d'une molécule.

1.2.3 Niveaux physiologiques d'intensité

Nous venons de voir que l'utilisation d'une échelle logarithmique pour mesurer les niveaux intensités sonores n'est pas qu'une commodité mathématique, c'est aussi une réalité physiologique.

Cependant, la forme de la courbe du seuil d'audition permet de se rendre compte à quel point la sensibilité du système auditif humain dépend de la fréquence : à 1000 Hz une pression de 2×10^{-5} Pa suffit à provoquer une sensation sonore, tandis qu'il faut une pression 100 fois plus élevée à 50 Hz.

Le niveau physique d'intensité, qui est une grandeur objective que l'on peut mesurer avec un sonomètre est donc différent du niveau subjectif perçu par l'oreille, selon la fréquence.

Pour tenir compte de ce phénomène, on prend pour référence le niveau physique d'un son sinusoïdal de 1000 Hz et on établit des courbes d'égale sensation sonore ou courbes isosoniques, comme le montre la figure 1.3. Ces courbes isosoniques définissent des **niveaux physiologiques** repérés en unités sans dimension appelées **phones** : le niveau physiologique d'un son est de N phones si son intensité est jugée équivalente à celle d'un son de 1000 Hz de N dB.

D'un point de vue pratique, pour la mesure des bruits à l'aide d'un sonomètre (voir travaux pratiques avec le sonomètre), on utilise des filtres de pondération appelés filtres A, B ou C. Les niveaux sont alors mesurés en dB(A), dB(B) ou dB(C).

1.3 Exercices

- Calculer l'intensité et la pression acoustique correspondant à un niveau d'intensité de 100 dB.
Si on double la pression acoustique quelle est la variation du niveau d'intensité ?
Même question si on divise par deux l'intensité acoustique.
- Si deux sons diffèrent de 60 dB, quel est le rapport de leur intensité et de leur pression acoustique ?

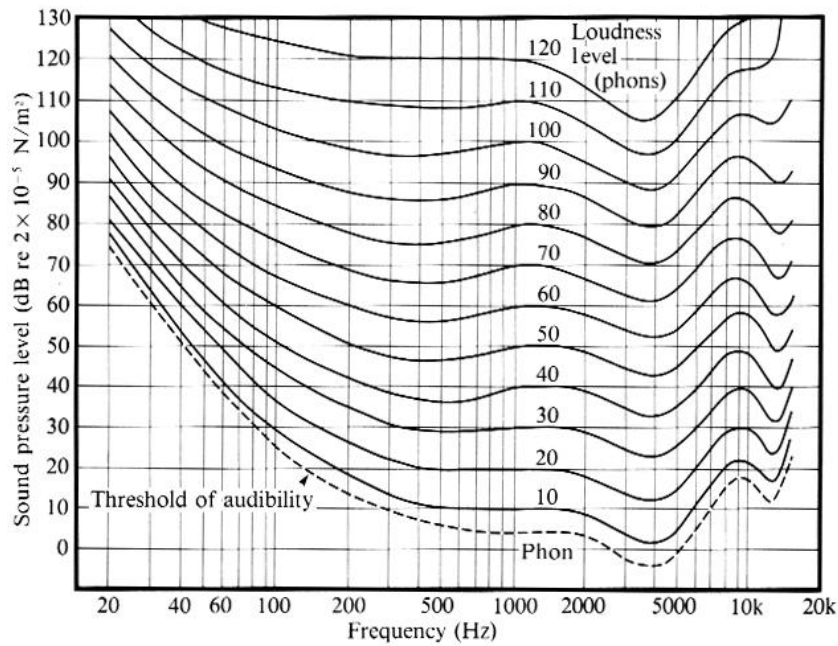


FIG. 1.3 – Courbes isosoniques.

3. 100 personnes parlent ensemble chacune avec un niveau sonore de 50 dB. Quel est le niveau sonore total ?
4. Déterminer le niveau d'intensité acoustique à une distance de 10m d'une source ponctuelle qui émet de façon isotrope avec une puissance de 1W.
5. Les niveaux de bruits mesurés dans une salle toutes les 15 minutes sont les suivants :
 (0,15mn) : 80 dB ; (15,30mn) : 95 dB ; (30,45mn) : 100 dB ; (45,60mn) : 90 dB
 On suppose que les niveaux sont constants pendant chaque intervalle de temps. Quel est le niveau équivalent correspondant à la période de mesure ?
6. Un haut parleur possède une membrane plane de surface $S = 10 \text{ cm}^2$ qui vibre avec un mouvement sinusoïdal d'amplitude $u_0 = 0.1 \text{ mm}$ et de fréquence $f = 1000 \text{ Hz}$. Au voisinage de cette membrane on peut considérer que l'onde émise est plane. Quelle sont l'intensité et la puissance acoustique ? Si le même haut parleur devait délivrer une puissance identique pour une fréquence $f' = 50 \text{ Hz}$ quelle serait l'amplitude de son mouvement ? En déduire pourquoi les HP chargés de reproduire les basses fréquences ("boomer") doivent avoir de grands diamètres.

Chapitre 2

ANALYSE DES SONS

2.1 Analyse de Fourier

Si $p(t)$ est la pression acoustique qui caractérise un son en un point de l'espace, on peut distinguer plusieurs cas, du plus simple au plus complexe :

2.1.1 Son pur

On appelle son pur, un son tel que la pression acoustique qui le caractérise en un point de l'espace est une fonction sinusoïdale du temps de la forme $p(t) = p_0 \sin \omega t$, où p_0 est l'amplitude en Pascal.

Dans ce cas, la pression efficace est :

$$p_{eff}^2 = \langle p^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{p_0^2}{2} \Rightarrow p_{eff} = p_0 / \sqrt{2} \quad (2.1)$$

2.1.2 Son complexe périodique

On appelle son complexe périodique, un son tel que la pression acoustique qui le caractérise en un point de l'espace soit une fonction périodique du temps, de période T . On peut alors montrer (Joseph Fourier 1820) que ce son est la superposition de sons purs dont les fréquences f_n sont des multiples de la fréquence $f_1 = 1/T$ appelée fréquence fondamentale :

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.2)$$

Les différents termes de pulsation $\omega, 2\omega, \dots$ sont appelés harmoniques.

Attention : c'est l'harmonique d'ordre 1 (correspondant à ω) qui est appelé fondamental.

Les coefficients a_n et b_n sont reliés à la fonction $p(t)$ par les relations :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos n\omega t dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin n\omega t dt \quad (2.3)$$

La détermination des coefficients a_n et b_n d'un son complexe périodique constitue son **analyse harmonique**. Ce développement, dit en série de Fourier, fait intervenir un nombre infini de termes. Dans la pratique on peut reconstituer avec une bonne approximation la fonction $p(t)$ en se limitant à un nombre fini de termes. La figure 2.1 montre l'exemple de la synthèse approchée d'une fonction périodique en dents de scie à partir de ses 6 premiers harmoniques.

Des exemples de diagrammes temporels (amplitude en fonction du temps) et fréquentiels (amplitude en fonction de la fréquence) de sons complexes périodiques sont représentés sur la figure 2.2.

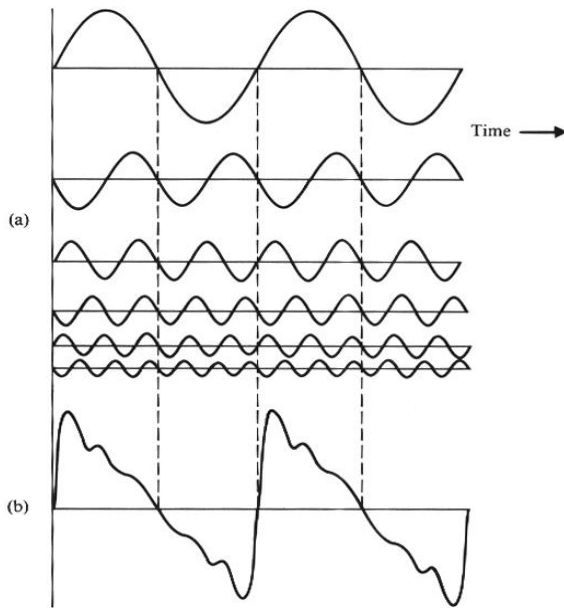


FIG. 2.1 – Synthèse d'une fonction périodique en dents de scie à partir de ses 6 premiers harmoniques.

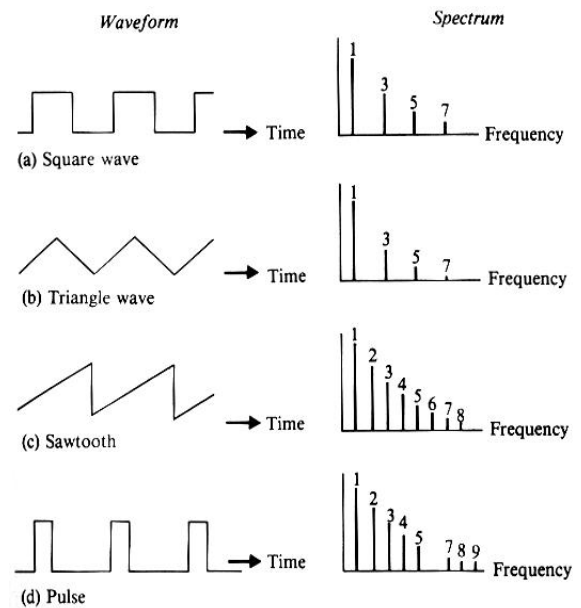


FIG. 2.2 – Exemples de diagrammes temporels et fréquentiels de sons complexes périodiques.

2.1.3 Son complexe non périodique

Si la fonction $p(t)$ qui représente la pression acoustique n'est pas périodique, on doit remplacer la décomposition en série de Fourier par une décomposition en intégrales de Fourier (ou transformation de Fourier). Le diagramme fréquentiel qui en résulte est plus compliqué et peut comporter n'importe quelles fréquences. Dans ce cas l'analyse harmonique est remplacée par une analyse spectrale.

Parmi les sons complexes non périodiques on peut distinguer deux catégories importantes :

2.1.3.1 Sons musicaux

Les sons émis par les instruments de musique ne sont pas rigoureusement périodiques dans la mesure où ils comportent forcément un début (phase d'attaque), et une fin (phase d'extinction). Ceci est particulièrement vrai pour les sons brefs (cordes pincées ou frappées, percussions etc...). A l'opposé, les sons de longues durées (note soutenue à l'orgue par exemple) constituent de très bonnes approximations de sons complexes périodiques.

Cependant, une note de musique a, en général, une durée suffisamment longue pour que l'oreille puisse en déterminer la hauteur, c'est à dire la fréquence fondamentale. Il faut pour cela que la note, de fréquence f soit perçue pendant un nombre suffisant de périodes $T = 1/f$ pour que l'oreille ait le temps de "l'analyser" (il est facile de constater expérimentalement que plus une note est de courte durée, plus il est difficile d'en déterminer la hauteur). Il en résulte que le diagramme fréquentiel d'une note de musique jouée par un "instrument harmonique" comporte en général une série de pics étroits, le premier correspondant à la fréquence fondamentale (qui caractérise la hauteur de la note) et les suivants aux différents harmoniques qui caractérisent le timbre de l'instrument. Nous reviendrons plus en détails sur cette catégorie de sons.

2.1.3.2 Bruits

Les bruits représentent une catégorie particulière de sons complexes non périodiques pour lesquels la pression acoustique peut être considérée comme une fonction plus ou moins aléatoire du temps. Les bruits peuvent être transitoires (claquement, explosion...) ou stationnaires (moteur, ventilateur, etc). Parmi les

différents types de bruits stationnaires on distingue en particulier :

- Le “bruit blanc” caractérisé par un spectre plat : $p(f) = C^{te}$
- Le “bruit rose” caractérisé par un spectre linéairement décroissant avec la fréquence.

2.1.4 Analyse en bandes

Pour analyser un son, on le transforme d’abord en un signal électrique $V(t)$ proportionnel à $p(t)$ par l’intermédiaire d’un dispositif électroacoustique tel que celui schématisé figure 2.3. Pour déterminer l’intensité ou l’amplitude correspondant à une fréquence f_c on peut alors utiliser un filtre ne laissant passer que la fréquence f_c . En réalité, un filtre laisse toujours passer une bande de fréquence Δf centrée sur f_c . L’analyse en bande consiste à balayer toutes les fréquences de façon à déterminer l’intensité par intervalle de fréquence Δf .

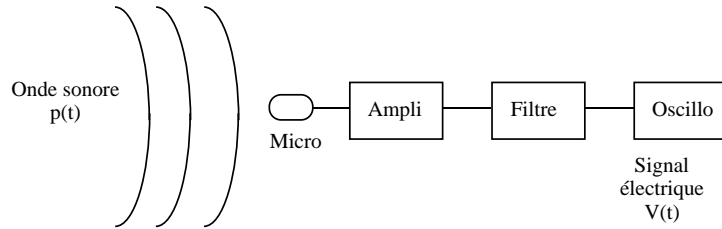


FIG. 2.3 – Schéma d’un dispositif électro-acoustique élémentaire permettant d’analyser un son après l’avoir transformé en un signal électrique.

Ce type d’analyse peut aussi se faire beaucoup plus rapidement à l’aide d’un ordinateur équipé d’un logiciel de traitement de signaux acoustiques tel que le logiciel dBFA que nous utiliserons en travaux pratiques.

En acoustique, on travaille à $\Delta f/f_c = C^{te}$. Pour cela on choisit les fréquences f_c selon une progression géométrique de raison r , la fréquence centrale f_c étant la moyenne géométrique des fréquences f_{inf} et f_{sup} qui limitent la bande Δf . On a donc :

$$f_c(n) = r f_c(n-1) \quad ; \quad f_c = \sqrt{f_{inf} f_{sup}} \quad (2.4)$$

On distingue trois types d’analyse :

- l’analyse en bandes d’octave : $r = 2$ et $\Delta f/f_c = 0.71$
- l’analyse en bandes de tiers d’octave : $r = 2^{1/3}$ et $\Delta f/f_c = 0.23$
- l’analyse en bandes fines : $\Delta f =$ quelques Hz.

Déterminons par exemple les fréquences limites f_{inf} et f_{sup} d’une bande centrée sur f_c pour une analyse en bande d’octave. On doit avoir :

$$\frac{f_{sup}}{f_{inf}} = 2 \quad ; \quad f_c^2 = f_{inf} f_{sup} \quad (2.5)$$

d’où :

$$f_{inf} = \frac{f_c}{\sqrt{2}} \quad ; \quad f_{sup} = \sqrt{2} f_c \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_c} = \frac{(\sqrt{2} f_c - f_c/\sqrt{2})}{f_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 71\% \quad (2.6)$$

2.2 Notions d’acoustique musicale

2.2.1 La gamme musicale

Avant d’aborder les caractéristiques des sons musicaux il est bon de rappeler quelques notions élémentaires sur la gamme musicale :

- A chaque note de la gamme (*do, do[♯], re, re[♯], mi, fa, fa[♯], sol, sol[♯], la, la[♯], si*) correspond une fréquence.
- On appelle intervalle entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 non pas la différence $f_2 - f_1$ mais le **rapport** f_2/f_1 .
- L'intervalle entre deux notes identiques successives s'appelle **octave**, une octave correspond à un rapport de fréquences égal à 2.

Exemple : $la_3 = 440$ Hz , $la_4 = 880$ Hz.

Remarque : pour différencier des notes de fréquences multiples on leur affecte un numéro de -1 à 7 : les notes s'étendent ainsi du $do_{-1} = 16.352$ Hz au $si_7 = 7902.1$ Hz.

En occident, les instruments de musique sont généralement accordés selon la gamme dite tempérée pour laquelle une octave est divisée en 12 intervalles égaux, ou demi-tons. Les notes de la gamme (*do, do[♯], re, re[♯], mi...*) forment donc une progression géométrique de raison r . Pour passer d'un demi-ton au demi-ton suivant il faut multiplier la fréquence par la constante r telle que $r^{12} = 2$ d'où $r = 2^{1/12} = 1.05946...$

Un demi-ton correspond donc à un rapport de fréquences égal à 1.05946

Exemple : $la_3 = 440$ Hz , $la_3^{\sharp} = 440 \times 1.05946 = 466.16$ Hz, $si_3 = 466.16 \times 1.05946 = 493.88$ etc...

De ce fait, le papier à musique peut être considéré comme du papier semi-logarithmique où l'abscisse représente le temps et l'ordonnée la fréquence en échelle logarithmique comme le montre la figure 2.4.

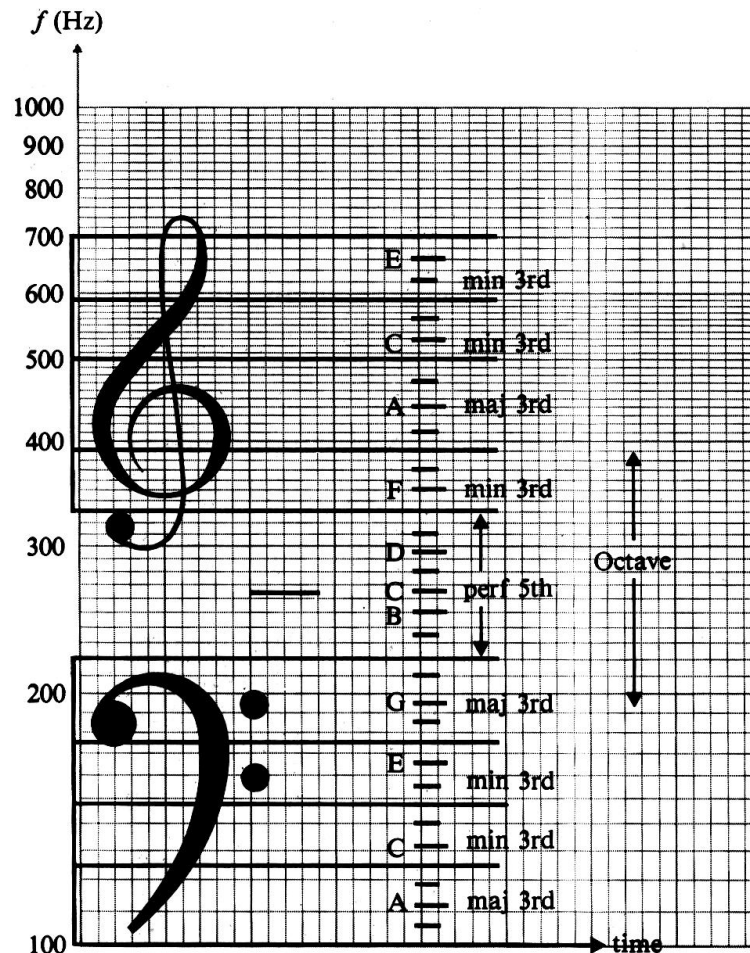


FIG. 2.4 – Le papier utilisé par les musiciens peut être considéré comme du papier semi-logarithmique avec en ordonnée la fréquence correspondant à la hauteur des notes et en abscisse le temps correspondant à leur durée. On notera que certaines lignes sont espacées de trois demi-tons (tierce mineure) et d'autres de quatre demi-tons (tierce majeure). Les notes sont indiquées ici avec la convention anglosaxonne : A B C D E F G = la si do ré mi fa sol.

La théorie de la musique est très complexe, et ne peut pas se résumer en quelques lignes. Cependant on peut en comprendre quelques principes simples si l'on considère qu'une note, jouée sur un instrument

N	Fréquence du mode N (Hz)	Note de la gamme tempérée la plus proche (fréquence)	Ecart relatif $\Delta f/f$ entre la note de la gamme et la fréquence du mode
1	261.63	do_3 (261.63)	0
2	523.26	do_4 (523.26)	0
3	784.89	sol_4 (783.99)	0.11 %
4	1046.5	do_5 (1046.52)	0
5	1308.2	mi_5 (1318.51)	0.79 %
6	1569.8	sol_5 (1567.98)	0.11 %
7	1831.4	-	-
8	2093.0	do_6 (2093.0)	0
9	2354.7	re_6 (2349.3)	0.26 %
10	2661.6	mi_6 (2637.0)	0.79 %

TAB. 2.1 – Fréquences des 10 premiers harmoniques correspondant à la note do_3 jouée sur une corde.

est le résultat de la mise en vibration d'une corde, d'une colonne d'air, ou encore d'une membrane.

Prenons l'exemple de la vibration d'une corde, plus facile à visualiser que celle d'une colonne d'air ou d'une membrane, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette vibration est une superposition de plusieurs modes correspondant à des fréquences données par la loi $f_N = Nc/2L$, avec N entier où c est la vitesse de propagation liée à la tension de la corde et à sa masse par unité de longueur. Nous verrons plus loin comment il est possible de déterminer l'amplitude de chacune de ces fréquences à partir des conditions d'excitation de la corde.

Supposons que la fréquence fondamentale ($N = 1$) de la corde corresponde à la note $do_3 = 261.63$ Hz, les fréquences des harmoniques sont alors données par le tableau 2.1.

La note do jouée sur cette corde comporte donc intrinsèquement, dans ses six premiers harmoniques, les notes do , sol et mi , on comprend donc que ces trois notes, jouées simultanément présentent une très grande consonance : on dit qu'elles forment un accord parfait.

On remarquera que le septième harmonique ne correspond à aucune note de la gamme, elle confère donc aux instruments "riches en harmonique 7" un caractère dissonant, c'est le cas par exemple de l'attaque d'une note jouée avec un archet sur un violon.

On remarquera aussi que la gamme tempérée n'est qu'une approximation : le sol_4 de la gamme tempérée à une fréquence de 783.99 Hz alors que le 3^e harmonique du do_3 à une fréquence de 784.89 Hz, la différence relative de 0.11% est pratiquement imperceptible. Il en est de même pour l'écart entre le 5^e harmonique du do_3 et le mi_5 .

Les principaux intervalles consonants correspondent à des rapports de nombres entiers, ils sont résumés dans le tableau 2.2.

En particulier, les trois notes d'un accord parfait majeur ont des fréquences dans le rapport 4 :5 :6 tandis que les trois notes d'un accord parfait mineur ont des fréquences dans le rapport 10 :12 :15 (par exemple do , mi , sol et do , mi^b , sol pour les accords de do majeur et do mineur respectivement).

2.2.2 Caractéristiques d'un son musical

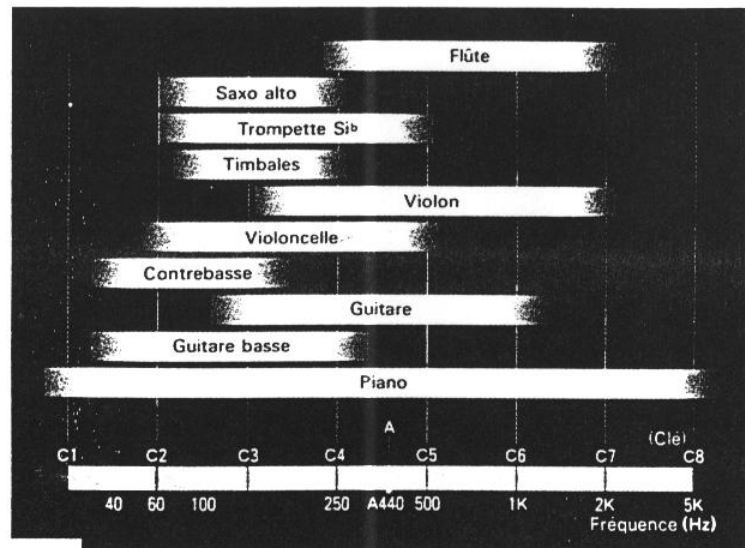
On s'intéressera plus particulièrement dans ce chapitre aux sons musicaux, par opposition aux bruits. Les caractéristiques d'un son musical sont :

- Le niveau sonore d'intensité ou de pression acoustique mesuré en decibel (relation 1.1)

Intervalle	Exemples	Rapport f_2/f_1	Intervalle tempéré	Ecart relatif
seconde	$do_3 - re_3$	$9/8 = 1.125$	1.122	0.27%
tierce mineure	$do_3 - mi_3^b$	$6/5 = 1.2$	1.189	0.92%
tierce majeure	$do_3 - mi_3$	$5/4 = 1.25$	1.260	0.80%
quarte	$do_3 - fa_3$	$4/3 = 1.333$	1.335	0.15%
quinte	$do_3 - sol_3$	$3/2 = 1.5$	1.498	0.13%
sixième mineure	$do_3 - la_3^b$	$8/5 = 1.6$	1.587	0.81%
sixième majeure	$do_3 - la_3$	$5/3 = 1.667$	1.682	0.96%
septième mineure	$do_3 - si_3^b$	$16/9 = 1.778$	1.782	0.23%
septième majeure	$do_3 - si_3$	$15/8 = 1.875$	1.888	0.70%
octave	$do_3 - do_4$	$2/1 = 2$	2	0%

TAB. 2.2 – Les principaux intervalles consonants.

- La hauteur, donnée par la fréquence la plus basse, ou fondamentale, de la décomposition spectrale. Plus cette fréquence est élevée plus le son est aigu, plus elle est basse, plus il est grave. On appelle tessiture l'étendue en fréquence accessible à un instrument de musique. La figure 2.5 montre les tessitures des principaux instruments de musique.



Gammes de fréquences d'instruments de musique (C1 = do_0 ; C2 = do_1 ; C3 = do_2 ; C4 = do_3 ; C5 = do_4 ; C6 = do_5 ; C7 = do_6 ; C8 = do_7).

FIG. 2.5 – Tessitures d'instruments de musique courants.

- La durée, temps pendant lequel on perçoit le son.
- Le timbre, caractérisé par la composition harmonique du son et par son évolution au cours du temps. Dans cette évolution on distingue trois phases : l'attaque, le soutenu et l'extinction (voir exemple figure 2.6) qui peuvent présenter des spectres différents. On doit donc effectuer une analyse dynamique de façon à déterminer l'évolution de l'amplitude de chaque fréquence composant le son au cours du temps. Cette évolution peut être représentée par un sonogramme. Un exemple de l'évolution de l'amplitude des premiers harmoniques au cours de la phase d'attaque d'une note jouée sur un tuyau d'orgue est montré figure 2.7.

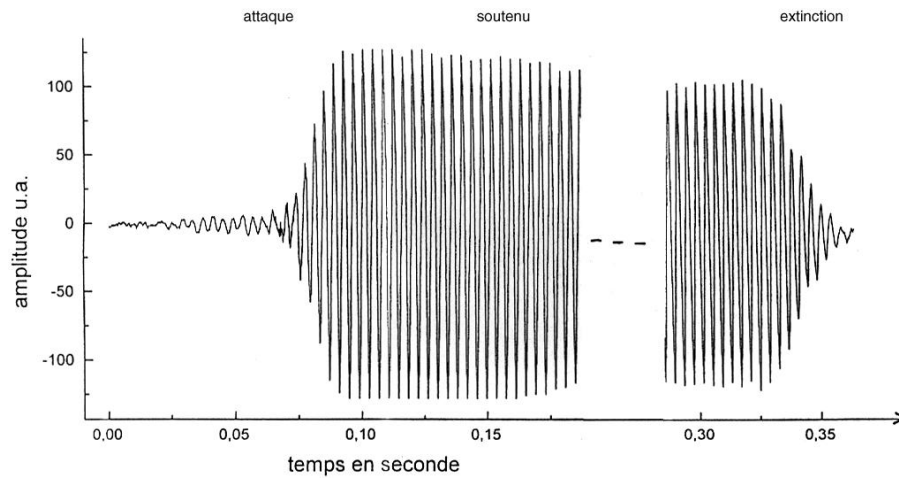


FIG. 2.6 – Attaque, soutenu et extinction pour un tuyau d’orgue.

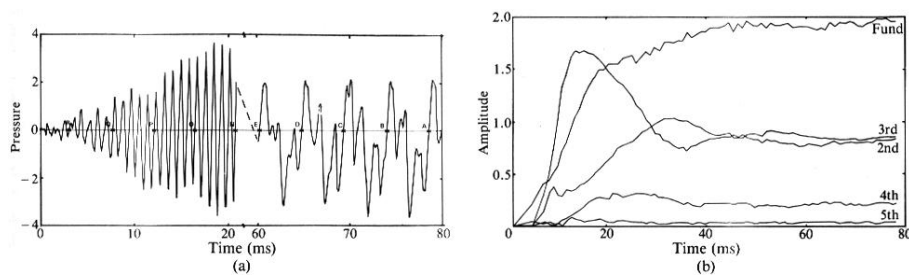


FIG. 2.7 – a) Forme de l’onde au cours de la phase d’attaque d’une note jouée sur un tuyau d’orgue. b) Evolution de l’amplitude des 5 premiers harmoniques.

2.3 Exercices

1. Trouver graphiquement la note émise par le tuyau d’orgue dont le diagramme temporel est représenté figure 2.6.
2. Comparer les intensités et niveaux d’intensité d’un son sinusoïdal et d’un son dont le diagramme temporel est donné par la figure 2.2a de même amplitude. Le résultat peut être vérifié expérimentalement avec un sonomètre et un générateur de fréquences connecté à un haut-parleur.
3. Déterminer les amplitudes des harmonique pour un son dont le diagramme temporel est donné par la figure 2.2c.

Chapitre 3

CORDE VIBRANTE

3.1 Ondes stationnaires

Considérons une onde plane se propageant selon l'axe Ox dans la direction des x positifs, de la forme $Y_i(x, t) = A_i \cos \omega(t - x/c)$ et arrivant sur une surface immobile parfaitement rigide située en $x = 0$ (onde sonore arrivant sur un mur par exemple). La surface ne pouvant pas absorber l'énergie transportée par l'onde, celle-ci va être réfléchiée vers les x négatifs. l'onde réfléchiée sera donc de la forme $Y_r(x, t) = A_r \cos \omega(t + x/c)$. Le plan en $x = 0$ restant immobile on doit avoir : $Y_i(0, t) + Y_r(0, t) = 0$ quelque soit t d'où $A_r = -A_i$.

Dans la région de l'espace $x < 0$ on aura superposition des deux ondes :

$$Y(x, t) = Y_i(x, t) + Y_r(x, t) = A \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (3.1)$$

En transformant la somme de cosinus en produit on trouve :

$$Y(x, t) = 2A \sin \left(\frac{\omega x}{c} \right) \sin \omega t = 2A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \sin \omega t = F(x) \sin \omega t \quad (3.2)$$

Cette fonction ne représente pas une onde qui se propage mais une **onde stationnaire** qui s'exprime comme le produit d'une amplitude $F(x)$ variable avec x par une fonction du temps $\sin \omega t$ (figure 3.1).

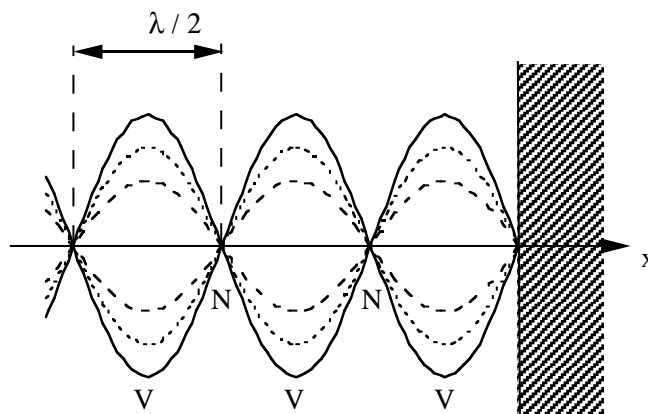


FIG. 3.1 – Ondes stationnaires par composition d'une onde sinusoïdale incidente avec l'une onde sinusoïdale réfléchiée.

Cette amplitude est :

- nulle pour $x = N\lambda/2$ avec N entier : ces points sont appelés nœuds de vibrations.
- maximum pour $x = (N + 1/2)\lambda/2$ avec N entier : ces point sont appelés ventres de vibrations.

Si maintenant on place une seconde surface immobile parfaitement rigide en $x = -L$ on aura en plus la condition $Y(-L, t) = 0$ quelque soit t , ce qui impose :

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad (3.3)$$

où n est un nombre entier. La relation $\lambda = c/f$ impose pour les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir dans cette région de l'espace :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad (3.4)$$

La présence de ce second obstacle, qui délimite une région finie de l'espace, a pour effet essentiel de quantifier les longueurs d'ondes (et donc les fréquences) des ondes stationnaires qui peuvent s'y établir. Ce phénomène est très important puisqu'il est à la base du fonctionnement de tous les instruments de musiques, qu'ils soient à cordes, à vent ou à percussion.

En fait, d'une manière générale, on peut montrer que la présence d'un obstacle rigide n'est pas nécessaire pour avoir réflexion d'une onde. Tout changement des caractéristiques du milieu de propagation conduit à une réflexion totale ou partielle de l'onde. Ce sont les conditions aux limites entre deux milieux qui déterminent les conditions de réflexion de l'onde.

Dans un milieu à trois dimensions limité par des parois, comme c'est le cas pour des ondes sonores se propageant dans une pièce fermée, la complexité du problème va de paire avec la complexité de l'agencement et des formes des parois, cependant pour le cas simple d'une pièce rectangulaire de dimension $L \times l \times h$ les fréquences des ondes stationnaires sont données par la relation :

$$f_{n,p,q} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q}{h}\right)^2} ; \quad n, p, q \text{ entiers} \quad (3.5)$$

On notera que, même dans ce cas simple, les fréquences des modes ne sont plus des multiples entiers de la fréquence fondamentale donnée par $f_{1,0,0} = c/2L$ si L est la plus grande dimension.

3.2 Etude d'une corde vibrante

Le but de cette étude est de déterminer, en fonction des conditions initiales, les fréquences de vibration d'une corde de longueur L et de masse linéique μ , tendue entre deux points avec une tension T . On suppose que la position d'équilibre de la corde est l'axe Ox et qu'elle ne peut effectuer que de petits déplacements selon Oy . Dans ces conditions l'équation de propagation est :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

La vitesse de propagation c ne dépend que de T et μ , une analyse dimensionnelle montre que $c = \sqrt{T/\mu}$.

On cherche une solution stationnaire non nulle, c'est à dire du type $Y(x, t) = F(x).G(t) \neq 0$, après substitution dans l'équation 3.6 et division par le produit $F(x).G(t)$ on obtient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = K \quad (3.7)$$

En effet, le premier membre de l'équation ne dépend que de t , le second ne dépend que de x , par conséquent ils sont tous deux égaux à une constante K . On a donc :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - KF = 0 ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - Kc^2 G = 0 \quad (3.8)$$

On reconnaît ici des équations différentielles du second ordre à coefficients constants dont les solutions générales sont, en posant $K = -k^2$:

$$F(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (3.9)$$

$$G(t) = C_3 \cos kct + C_4 \sin kct \quad (3.10)$$

Le choix $K = -k^2$ se justifie par le fait que si K était positif on aurait des solutions exponentielles non périodiques avec lesquelles il serait impossible de remplir les conditions précédentes.

Les solutions stationnaires non nulles de l'équation 3.6 peuvent donc se mettre sous la forme générale :

$$Y(x, t) = (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) (C_3 \cos kct + C_4 \sin kct) \quad (3.11)$$

Où les constantes C_i sont à déterminer d'après les conditions initiales du mouvement. Parmi ces conditions, il y en a une qui est commune à tous les types de cordes vibrantes : elles sont fixées en $x = 0$ et $x = L$. Cette condition $Y(0, t) = Y(L, t) = 0$ impose $C_1 = 0$ et $kL = n\pi$ (n entier > 0).

Les vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités sont donc décrites par :

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[C_3 \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \quad (3.12)$$

Soit encore, en posant $C_2 C_3 = A_n$ et $C_2 C_4 = B_n$:

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \quad (3.13)$$

Nous nous proposons maintenant de déterminer ces solutions (c'est à dire les coefficients A_n et B_n) pour les deux cas distincts correspondant à la corde pincée (guitare, harpe...) et à la corde frappée (piano).

3.2.1 La corde pincée

Les conditions initiales sont :

- $\partial Y_p(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0$: la corde est immobile à l'instant initial, c'est le cas par exemple d'une corde de guitare que l'on tire, maintient immobile puis lâche brusquement à $t = 0$.

- $Y_p(x, 0) = f(x)$: $f(x)$ est la fonction qui décrit la forme de la corde à l'instant initial.

La condition $\partial Y_p(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0$ impose $B_n = 0$.

La solution générale est donc de la forme :

$$Y_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (3.14)$$

$Y_p(x, t)$ est une somme d'ondes stationnaires, la valeur $n = 1$ correspond à la fréquence fondamentale $f_1 = c/2L$, l'harmonique de rang n et de fréquence $f_n = n f_1$ à une amplitude A_n que l'on peut déterminer grâce à la dernière condition $Y_p(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.15)$$

On reconnaît ici une série de Fourier dont les coefficients sont donnés par :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.16)$$

Supposons que la fonction $f(x)$ qui décrit la position initiale de la corde soit donnée par :

$$f(x) = \frac{h}{d} x ; \quad 0 < x < d$$

$$f(x) = \frac{h}{L-d} (L-x) ; \quad d < x < L$$

Ce qui correspond à une corde que l'on écarte de $h \ll L$ de sa position d'équilibre avant de la lâcher, comme l'indique la figure 3.2.

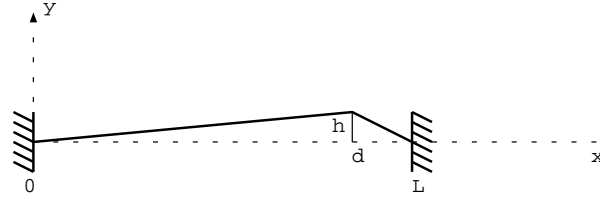


FIG. 3.2 – Corde de longueur L , fixée à ses deux extrémités, que l'on écarte de $h \ll L$ de sa position d'équilibre avant de la lâcher.

On a donc :

$$A_n = \frac{2h}{Ld} \int_0^d x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2h}{L(L-d)} \int_d^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.17)$$

$$= \frac{2hL^2}{n^2\pi^2d(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \quad (3.18)$$

On constate que l'amplitude décroît rapidement (comme $1/n^2$) avec le rang n .

La figure 3.3 représente la fonction $Y_p(t)$ pour $x = L/10$ et $d = L/5$. Les "cassures" de la fonction n'ont pas de réalité physique, elles sont dues à l'approximation triangulaire que l'on a donné à la forme initiale de la corde. De même, la forme de la corde est représentée sur la figure 3.4 à 4 instants successifs séparés d'un quart de la période du fondamental. On remarque que la corde conserve une forme triangulaire due aux conditions initiales et à l'absence de dissipation par les forces de frottement, qui ne sont pas prises en compte dans ce modèle simple.

Il est possible de trouver une approximation plus réaliste pour la forme initiale de la corde en prenant par exemple deux droites raccordées par une portion de parabole au voisinage du point où on tire sur la corde. Ceci rend les calculs plus compliqués dans le cas général, mais il est possible de montrer, dans le cas simple où on tire la corde en son milieu ($d = L/2$), que ce raffinement n'a que très peu d'influence sur le résultat final. La forme initiale est décrite dans ce cas par les relations :

$$f(x) = \frac{2h}{L}x ; \quad 0 < x < \frac{l-\epsilon}{2} \quad (3.19)$$

$$f(x) = \frac{-2h}{L\epsilon}x^2 + \frac{2h}{\epsilon}x - \frac{h(L-\epsilon)^2}{2L\epsilon} ; \quad \frac{l-\epsilon}{2} < x < \frac{l+\epsilon}{2} \quad (3.20)$$

$$f(x) = \frac{2h(L-x)}{L} ; \quad \frac{l+\epsilon}{2} < x < L \quad (3.21)$$

D'après la relation 3.16 on trouve pour l'amplitude de l'harmonique de rang n :

$$A_n^{parabole} = \frac{16hL}{\epsilon n^3\pi^3} \sin\left(\frac{\epsilon n\pi}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.22)$$

Tandis que pour l'approximation triangulaire on a, pour $d = L/2$

$$A_n^{triangle} = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.23)$$

On peut vérifier que $A_n^{parabole} \rightarrow A_n^{triangle}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

Dans ce cas d'où vient la différence de timbre que l'on peut constater aisément entre une corde pincée avec l'ongle (ou un plectre) et avec le gras du doigt ? En fait, elle est principalement due au fait que dans le dernier cas on imprime à la corde un mouvement initial de rotation qui fait qu'elle ne vibre pas dans un plan il faut alors faire intervenir une dimension de plus pour décrire correctement le mouvement, on

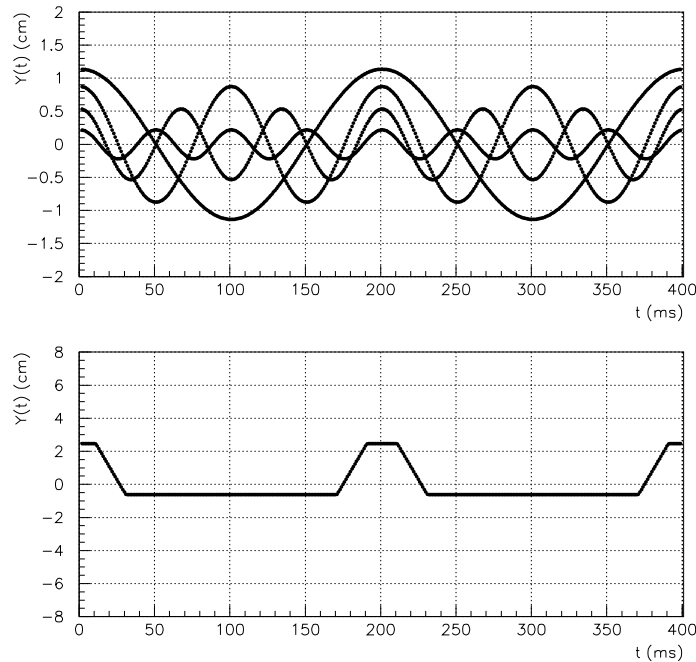


FIG. 3.3 – Les courbes du haut correspondent aux 4 premiers termes de la série $Y(t)$ pour $x = L/10$ et $d = L/5$ et celle du bas à la somme calculée jusqu'à l'harmonique 100.

constate qu'il en résulte une atténuation des amplitudes des harmoniques d'ordres élevés et donc un son plus "doux".

Dans tous les cas, il est possible de rendre nulles les amplitudes de certains harmoniques par un choix judicieux des conditions initiales : par exemple si on choisit $d = L/2$, les harmoniques pairs s'annulent tous et il ne reste que les harmoniques impairs d'amplitude :

$$A_{2n+1} = \frac{8h}{(2n+1)^2\pi^2} \quad (3.24)$$

Cette technique est utilisée par exemple par les guitaristes pour varier le timbre de leur instrument : en pinçant la corde vers son milieu, ce qui correspond au cas $d = L/2$ (jeu "sur la touche") on obtient un son doux, assez pauvre en harmoniques, au contraire, en pinçant la corde près de son point d'attache (chevalet) on obtient un son métallique riche en harmoniques.

3.2.2 La corde frappée

A l'instant $t = 0$ la corde est immobile dans sa position d'équilibre $Y_f(x, 0) = 0$. On la frappe avec un petit marteau de largeur $\epsilon \ll L$ situé entre $x = d$ et $x = d + \epsilon$, qui communique une vitesse initiale u à la partie frappée.

Dans ce cas les conditions initiales sont :

- $Y_f(x, 0) = 0$: la corde est dans sa position d'équilibre juste avant que le marteau ne la frappe.
- $\partial Y_f(x, t)/\partial t|_{t=0} = u$ pour $d \leq x \leq d + \epsilon$; $\partial Y_f(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0$ partout ailleurs.

La condition $Y_f(x, 0) = 0$ impose $A_n = 0$.

La solution générale est donc de la forme :

$$Y_f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (3.25)$$

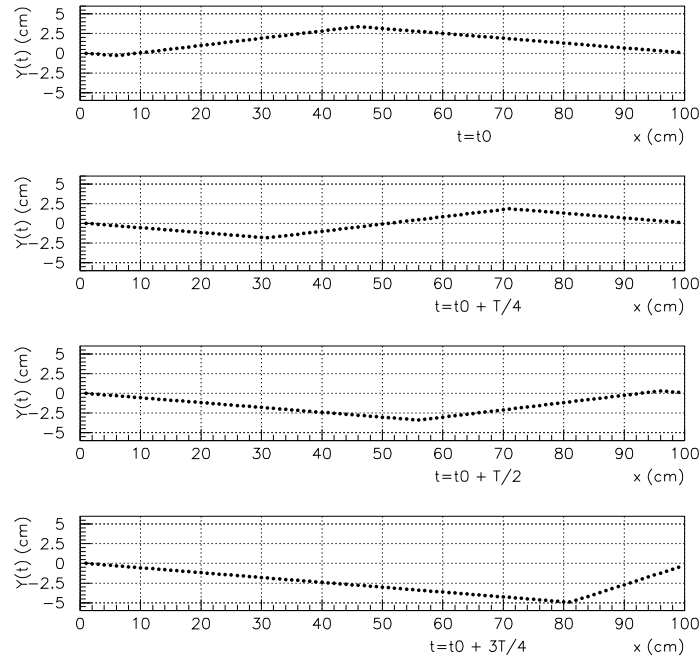


FIG. 3.4 – Forme de la corde correspondant aux conditions de la figure 3.3 à 4 instants successifs séparés d'un quart de la période du fondamental.

La condition $\partial Y_f(x, t)/\partial t|_{t=0} = u$ pour $d \leq x \leq d + \epsilon$ fixe les valeurs des constantes B_n :

$$\partial Y_f(x, t)/\partial t|_{t=0} = \frac{n\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u \quad ; \quad d \leq x \leq d + \epsilon$$

On reconnaît ici une série de Fourier dont les coefficients sont donnés par :

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_d^{d+\epsilon} u \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.26)$$

Comme $\epsilon \ll L$, la fonction à intégrer varie peu sur l'intervalle considéré et on a :

$$B_n = \frac{2u\epsilon}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \quad (3.27)$$

On voit que l'amplitude des harmoniques décroît comme $1/n$ au lieu de $1/n^2$ pour la corde pincée, la corde frappée rendra donc un son beaucoup plus riche en harmoniques de rang élevés que la corde pincée.

Le choix de l'endroit où la corde est frappée ($x = d$) peut permettre de sélectionner les harmoniques, par exemple, dans un piano, on cherche à supprimer le 7^e harmonique qui est dissonant pour cela il faut $B_7 = 0$ soit $7\pi d/L = N\pi$ d'où $d = NL/7$. On a donc la possibilité de frapper la corde en 6 endroits ($d = L/7, d = 2L/7, \dots$) pour supprimer cet harmonique.

3.3 Quelques notions sur les systèmes vibrants non-harmoniques

La plupart des instruments de musique sont constitués par des systèmes vibrants à une dimension (cordes vibrantes ou tuyaux sonores) pour lesquels les modes de vibration ont des fréquences multiples entiers d'une fréquence fondamentale. Cependant il existe aussi des systèmes plus complexes à deux dimensions comme les peaux tendues des timbales ou encore les cloches, pour ces systèmes les fréquences

des modes de vibration ne sont pas des multiples les unes des autres (ni de n'importe quel autre nombre) dans ce cas on ne parle plus d'harmoniques mais de "partiels". La présence de partiels dans un son musical le rend parfois difficile à analyser par l'oreille, c'est le cas par exemple pour certaines cloches dont il est difficile de déterminer la hauteur du fondamental.

D'autre part, même pour les systèmes à une dimension comme par exemple la corde vibrante, les harmoniques ne sont pas toujours exactement multiples du fondamental. Ceci est dû au fait qu'une corde réelle a un diamètre non négligeable et n'est pas "parfaitement élastique", la raideur qui en résulte fait qu'elle vibre avec des fréquences harmoniques légèrement plus élevées que $2f_0$, $3f_0$, etc... Néanmoins, cet effet n'est réellement perceptible que pour les cordes de diamètres importants comme les grosses cordes d'un piano.

3.4 Exercices

1. Montrer qu'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermé à l'autre ne peut émettre que des harmoniques impairs tandis qu'un tuyau sonore ouvert à ses deux extrémités peut émettre des harmoniques pairs et impairs.
2. Une corde de section s , de module d'Young E et de longueur L est tendue avec une tension T . On rappelle que la tension est donnée par $T = Es(L - L_0)/L$ où L_0 représente la longueur au repos de la corde. Montrer que si on rallonge la corde de ΔL en tirant dessus alors qu'elle est en train de vibrer (technique utilisée par les guitaristes de blues), sa fréquence de vibration augmente de :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{Es}{2T} \frac{\Delta L}{L}$$

Chapitre 4

ELECTRO-ACOUSTIQUE

4.1 Rappels sur les dipôles électrocinétiques

4.1.1 Définitions

On appelle dipôle électrocinétique tout système relié à l'extérieur par deux conducteurs. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par les deux grandeurs électriques qui sont la tension $u(t)$ aux bornes du dipôle et le courant $i(t)$ qui le traverse.

Le courant traversant un dipôle correspond au déplacement de charges électriques sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel aux bornes du dipôle. A tout instant le courant entrant par une borne d'un dipôle est égal au courant sortant par l'autre borne. Il n'y a pas d'accumulation de charges. L'intensité $i(t)$ de ce courant mesure le débit des charges électriques qui traversent une section de conducteur.

En régime stationnaire (indépendant du temps), il existe une relation entre l'intensité i traversant le dipôle et la tension u entre ses bornes. Cette relation peut se mettre sous la forme $i = i(u)$ ou $u = u(i)$. Les graphes obtenus sont appelés caractéristiques statiques :

- $i = i(u)$: caractéristique statique courant-tension du dipôle
- $u = u(i)$: caractéristique statique tension-courant du dipôle

Un dipôle est dit **non polarisé** si sa caractéristique est symétrique par rapport à l'origine : son sens branchement n'importe pas (c'est le cas d'un résistor par exemple). Dans le cas contraire, il est dit **polarisé** et son sens branchement a de l'importance (c'est le cas d'une pile par exemple).

4.1.2 Associations de dipôles

Si les dipôles sont connectés en série (figure 4.1), ils sont alors tous traversés par la même intensité et la tension aux bornes du dipôle équivalent est égale à la somme des tensions partielles.

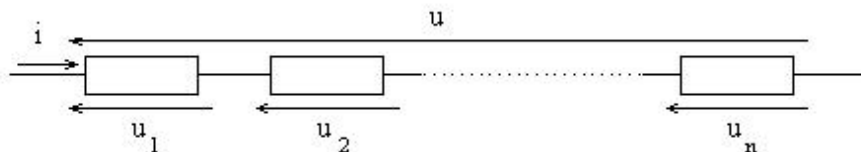


FIG. 4.1 – Dipôles en série.

Si les dipôles sont connectés en parallèle (figure 4.2), ils sont alors tous soumis à la même tension. Le courant total qui traverse l'ensemble des dipôles est égal à la somme des courants individuels.

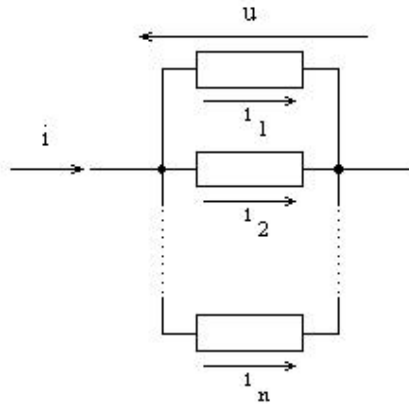


FIG. 4.2 – Dipôles en parallèle.

4.1.3 Puissance reçue par un dipôle

Considérons le dipôle AB (figure 4.3) parcouru par un courant i circulant du point A (potentiel V_A) au point B (potentiel V_B).

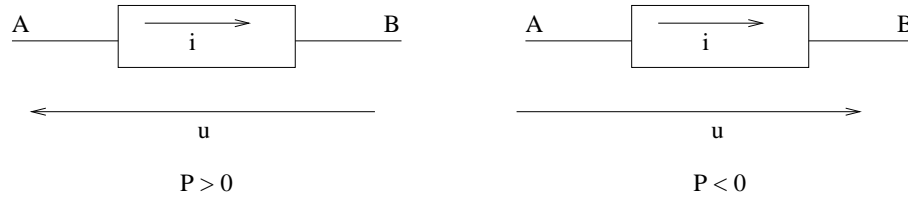


FIG. 4.3 – Puissance reçue par un dipôle.

Pendant un intervalle de temps Δt , une charge $\Delta q = i\Delta t$ entre en A avec une énergie potentielle ΔqV_A et sort en B avec une énergie ΔqV_B : L'énergie électrique reçue par le dipôle correspond à la différence entre les énergies potentielles en A et B :

$$\Delta W = \Delta qV_A - \Delta qV_B \quad (4.1)$$

La puissance électrocinétique instantanée reçue par le dipôle a donc pour expression :

$$P(t) = \frac{\Delta W}{\Delta t} = i(V_A - V_B) = u(t)i(t) \quad (4.2)$$

Remarque : Dans tout ce qui suit nous utiliserons la “la convention récepteur” dans laquelle la quantité $P(t) = u(t)i(t)$ représente la puissance électrique instantanée **reçue** par le dipôle.

Avec cette convention de signe, la puissance reçue par un dipôle est positive lorsque le courant “descend” le potentiel, de même que de l'eau descendant une conduite forcée d'un barrage hydroélectrique fournit de l'énergie à une turbine. Au contraire la puissance reçue par un dipôle est négative lorsque le courant “remonte” le potentiel de même qu'il faut fournir de l'énergie pour remonter de l'eau à l'aide d'une pompe.

4.1.4 Lois de Kirchhoff : loi des mailles, loi des noeuds

On appelle circuit (ou réseau) électrique un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs parfaits (figure 4.4).

- Un noeud est un point du circuit relié à trois dipôles ou plus (points A , B , C et D).
- Une branche de réseau est la partie de circuit comprise entre deux noeuds (la branche AB comprend le dipôle D_2 , la branche AD comprend les dipôles D_3 et D_6).

- Une maille est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un noeud donné (la maille $ABDA$ comprend les dipôles D_2 , D_3 , D_4 et D_6).

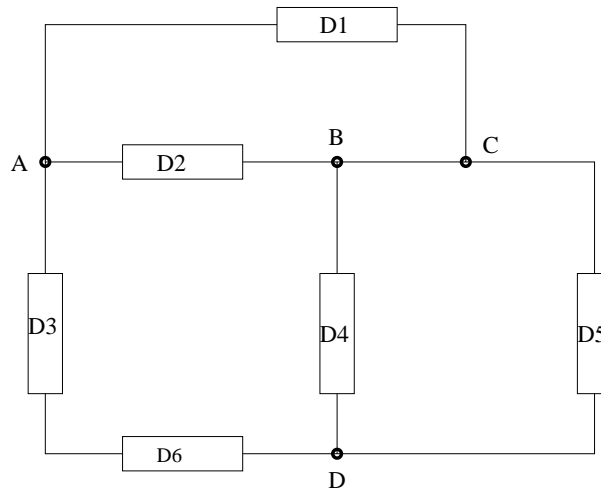


FIG. 4.4 – Réseau de dipôles.

Les deux lois de Kirchhoff permettent l'analyse des réseaux électriques.

- Loi des noeuds : En tout noeud d'un réseau, et à tout instant, la somme algébrique des courants est nulle. Ou encore : la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants. Exemple figure 4.5 pour le noeud A : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi des mailles : Le long de toute maille d'un réseau électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle. Exemple figure 4.5 pour la maille $ABDA$: $u_4 + u_6 + u_3 - u_2 = 0$.

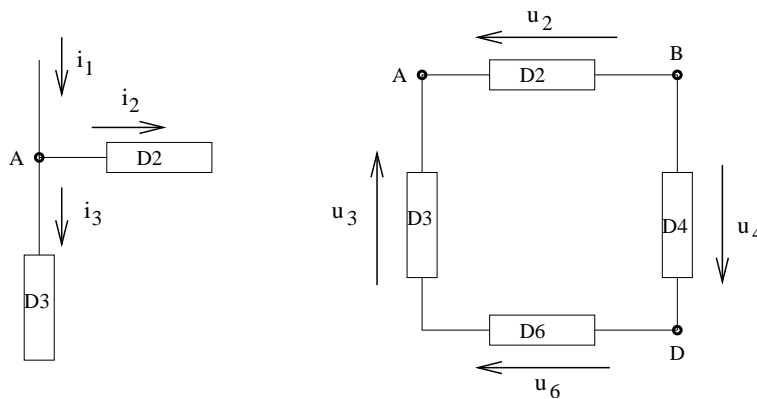


FIG. 4.5 – Loi des noeuds et des mailles.

4.1.5 Résistors

Un résistor¹ est un dipôle constitué d'un matériau conducteur et caractérisé par une résistance R constante, exprimée en Ohm. La tension aux bornes d'un résistor est donnée par la loi d'Ohm : $u(t) = Ri(t)$

La puissance instantanée reçue par un résistor a pour expression :

$$P(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad (4.3)$$

Cette puissance est toujours positive, un résistor se comporte toujours comme un récepteur : c'est un dipôle passif non polarisé dont la caractéristique est linéaire (figure 4.6). La puissance reçue est entièrement

¹Dans la pratique on confond souvent les termes résistor et résistance, la résistance étant la grandeur physique qui caractérise le résistor.

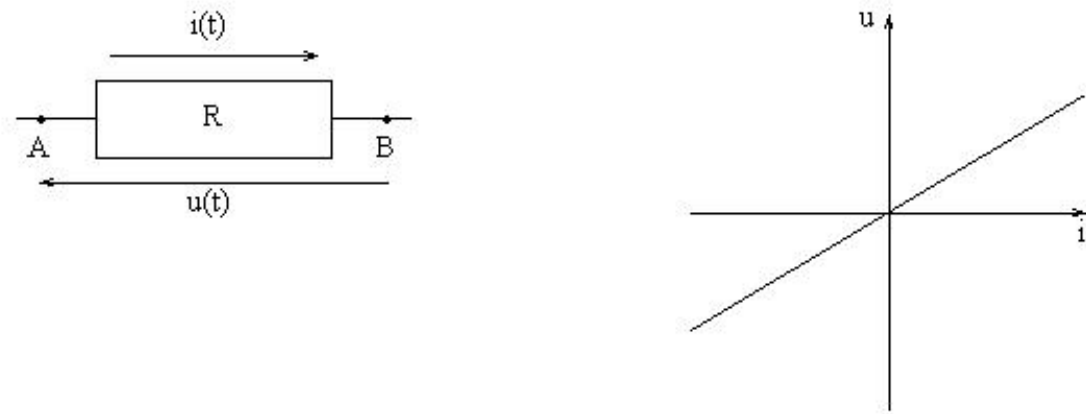


FIG. 4.6 – *Caratéristique du résistor AB.*

convertie en chaleur : c'est l'effet Joule, utilisé par exemple dans les appareils de chauffage électrique ou cette chaleur est transmise au milieu ambiant par conduction, convection (radiateurs convecteurs) et radiations infrarouges (radiateurs de type "radiant"). Cet effet peut conduire à une élévation importante de la température du résistor, c'est le cas par exemple du filament d'une lampe à incandescence : une partie de la chaleur (quelques pourcents) est alors radiée sous forme de lumière visible.

4.1.6 Générateurs de tension

Les générateurs de tension constituent les sources d'énergie qui permettent la circulation d'un courant électrique dans un circuit.

Un générateurs de tension idéal délivre une tension constante, indépendante du courant débité, cette tension est la force électromotrice e (f.e.m.) du générateur. Sa caractéristique tension-courant est donnée par la figure 4.7.

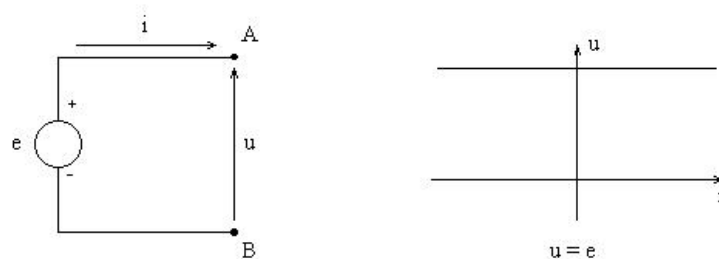


FIG. 4.7 – *Caractéristique tension-courant d'un générateur de tension idéal.*

Dans la réalité un générateur de tension (pile, batterie, accumulateur...) possède toujours une résistance interne r qui produit une chute de tension proportionnelle au courant débité. Il est donc caractérisé par sa f.e.m. e que l'on peut mesurer avec un voltmètre lorsque le générateurs ne fournit aucun courant et par sa résistance interne r . Lorsqu'on connecte le générateur à un circuit il fournit un courant i et la tension u à ses bornes est :

$$u = e - ri \quad (4.4)$$

La caractéristique tension-courant d'un générateur de tension réel est donc décrite par la fonction $u = e - ri$ (figure 4.8) :

Connectons le générateur à une résistance de charge R_c (figure 4.9) :

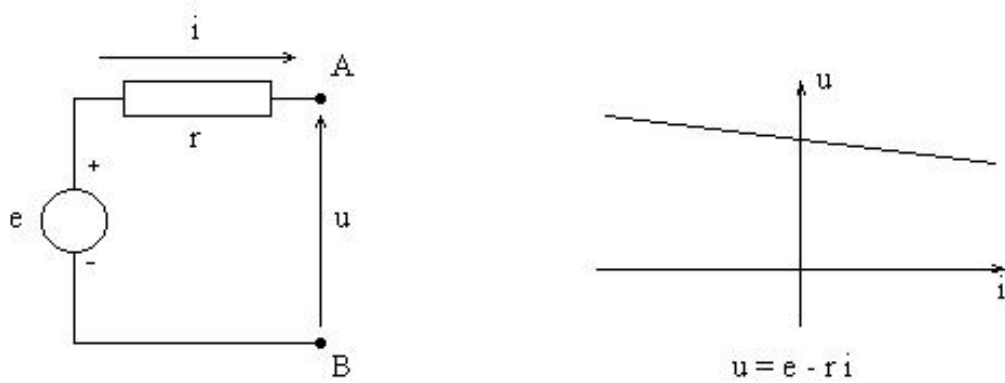
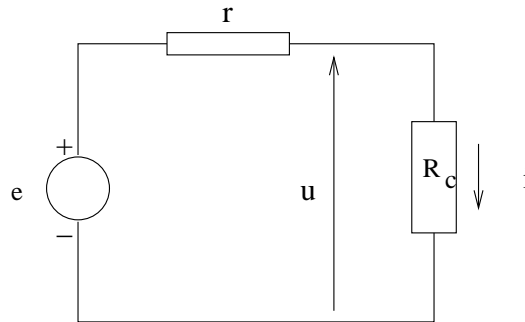


FIG. 4.8 – Caractéristique tension-courant d'un générateur de tension réel.

FIG. 4.9 – Générateur de tension connecté à une résistance de charge R_c .

La loi des mailles appliquée au circuit permet d'écrire :

$$e - ri - R_c i = 0 \rightarrow i = \frac{e}{r + R_c} \quad (4.5)$$

la tension u aux bornes de R_c est donc :

$$u = R_c i = e \frac{R_c}{r + R_c} = \frac{e}{1 + r/R_c} \quad (4.6)$$

Si on veut que u reste proche de e il faut $R_c \gg r$, mais dans ce cas le courant i débité sera très faible. Si on veut, au contraire un fort courant il faut que R_c soit faible, mais dans ce cas la chute de tension dans la résistance interne sera élevée, celle-ci consommera donc une puissance importante conduisant à un échauffement du générateur qui peut être dangereux, voire le détruire...

Donc pour $R_c \gg r$ la puissance fournie $P = ui$ est faible car i est faible de même pour $R_c \ll r$ car dans ce cas toute la puissance est dissipée dans la résistance interne. Examinons maintenant pour quelle valeur de R_c la puissance fournie par le générateur est maximum.

$$P = ui = \frac{e}{1 + r/R_c} \frac{e}{r + R_c} = \frac{e^2}{(r + R_c)(1 + r/R_c)} \quad (4.7)$$

P est maximum lorsque le dénominateur $D = (r + R_c)(1 + r/R_c)$ est minimum :

$$\frac{dD}{dR_c} = 1 - \frac{r^2}{R_c^2} \quad (4.8)$$

$D = 0$ pour $r = R_c$ (on peut vérifier que cette valeur correspond bien à un minimum en calculant la dérivée seconde).

On a donc :

$$P_{max} = \frac{e^2}{4r} \quad (4.9)$$

Cependant, on peut remarquer que la puissance dissipée dans la résistance interne est alors égale à la puissance fournie, faire fonctionner un générateur à sa puissance maximum conduit donc à une perte d'énergie importante à cause de sa résistance interne.

4.1.6.1 force contre-électromotrice

Dans le montage de la figure 4.8 la puissance du générateur est négative $P_{gene} = -ui$, égale et opposée à la puissance reçue par la résistance de charge R_c c'est donc dans ce cas un **dipôle actif**. Cependant, un générateur de tension peut fonctionner de façon passive si on "force" le courant à circuler en sens inverse en connectant un générateur de tension de f.e.m. $e' > e$ en opposition comme dans le montage suivant (figure 4.10) :

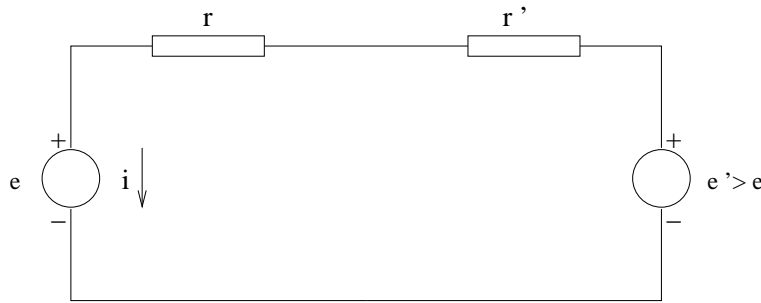


FIG. 4.10 – Générateurs de tension connectés en opposition.

La loi des mailles appliquée à ce circuit donne :

$$e' - r'i - ri - e = 0 \Rightarrow i = \frac{e' - e}{r + r'} \quad (4.10)$$

si $e' > e$ alors $i > 0$ et le courant circule bien dans le sens indiqué : c'est la f.e.m. e' qui impose le sens du courant. Dans ce cas e est une force contre-électromotrice (f.c.e.m).

La force contre-électromotrice correspond à l'énergie électrique par unité de charge (ou à la puissance par unité d'intensité) dissipée autrement que par effet Joule. Par exemple, pour un moteur électrique produisant une puissance mécanique P en étant alimenté par un courant i la f.c.e.m sera égale à $e = P/i$.

4.1.7 Quelques conseils pour l'analyse des réseaux de dipôles

Pour résoudre les problèmes faisant intervenir des réseaux de dipôles il est conseillé de :

1. Faire un schéma le plus simple possible du réseau en identifiant bien les noeuds, branches et mailles (par exemple, le schéma du réseau figure 4.4 peut être simplifié).
2. Fixer les sens des courants dans chaque branche. Ces sens peuvent être fixés arbitrairement mais il est préférable de choisir les sens naturels imposés par les générateur, lorsque cela est possible.
3. Appliquer les lois des noeuds et des mailles en repectant les conventions de signes des tensions en fonction des sens choisis pour les courants.

4.2 Electrocinétique en régime variable

Nous allons aborder maintenant deux types de dipôle, les condensateurs et les bobines, qui n'ont d'intérêt qu'en régime variable, c'est-à-dire lorsque les courants et les tensions dépendent du temps. En effet en régime statique un condensateur ne laisse pas passer le courant et se comporte donc comme un interrupteur ouvert, alors qu'une bobine se comporte donc comme un simple conducteur.

4.2.1 Condensateur

Un condensateur est un dipôle composé de deux conducteurs (les armatures) séparés d'un isolant (le diélectrique). Il est capable d'emmagasiner de l'énergie en accumulant des charges électriques en quantité égales mais de signes opposées sur ses deux armatures : la charge q portée par l'armature positive A est proportionnelle à la tension appliquée aux bornes du condensateur :

$$q(t) = Cu(t) \quad (4.11)$$

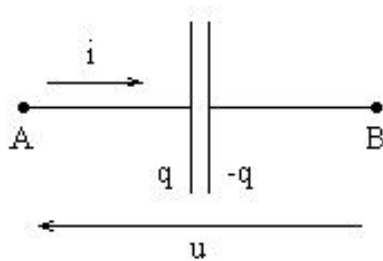


FIG. 4.11 – Condensateur.

Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du condensateur, il s'exprime en Farad (F). D'autre part la variation par unité de temps de la charge $q(t)$ est égale à l'intensité du courant traversant le condensateur :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad (4.12)$$

La puissance instantanée reçue par un condensateur peut s'écrire :

$$P(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{2}C \frac{d}{dt} (u^2(t)) \quad (4.13)$$

Si nous supposons que le condensateur est initialement déchargé ($u = 0$ à $t = 0$) Calculons l'énergie reçue par le condensateur pendant un intervalle de temps entre $t = 0$ et $t = T$:

$$W = \frac{1}{2}C \int_0^T \frac{d}{dt} (u^2(t)) dt = \frac{1}{2}C [u^2(T) - u^2(0)] = \frac{1}{2}Cu^2(T) \quad (4.14)$$

Nous trouvons ainsi l'expression de l'énergie potentielle électrostatique stockée dans un condensateur :

$$W = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (4.15)$$

Lorsqu'on connecte un condensateur chargé à un circuit, il se décharge en faisant circuler un courant $i = dq/dt$ et restitue ainsi son énergie potentielle

4.2.2 Bobine

Lorsqu'un courant i circule dans un bobinage il produit un champ magnétique. Si ce courant varie, le flux ϕ de ce champ magnétique varie et produit une force contre électromotrice (f.c.e.m.) opposée à cette variation de flux, (donc à la variation du courant). Dans une bobine le flux instantané $\Phi(t)$ est proportionnel au courant : $\phi = Li$. Le coefficient L est appelé auto-inductance, ou self-inductance, et s'exprime en Henry (H). On a donc :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.16)$$

Remarque : Il existe dans le langage courant des physiciens une certaine confusion dans les termes employés pour désigner le phénomène d'auto-induction, le dipôle dans lequel il a lieu (la bobine) et le coefficient L qui est l'auto-inductance, ou self-inductance ou encore "self" tout court !

La figure 4.12 montre le symbole utilisé pour une bobine et sa modélisation en convention récepteur :



FIG. 4.12 – Bobine et sa modélisation en convention récepteur.

A cette modélisation correspond l'équation :

$$u(t) = -e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.17)$$

La puissance instantanée reçue par la bobine s'écrit :

$$P(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{2}L \frac{d}{dt} (i^2(t)) \quad (4.18)$$

De la même façon que pour le condensateur, en intégrant entre l'instant $t = 0$ pour lequel $i = 0$ et l'instant $t = T$, nous obtenons l'énergie fournie à la bobine :

$$W = \frac{1}{2}L \int_0^T \frac{d}{dt} (i^2(t)) dt = \frac{1}{2}L [i^2(T) - i^2(0)] = \frac{1}{2}Li^2(T) \quad (4.19)$$

L'énergie potentielle électromagnétique stockée dans une bobine parcourue par un courant i est donc :

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \quad (4.20)$$

4.3 Dipôles en régime sinusoïdale

4.3.1 Notation complexe

Dans tout ce qui suit nous nous placerons en régime sinusoïdale, c'est à dire que les tensions et les courants seront de la forme

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad ; \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (4.21)$$

Avec cette convention c'est la tension qui définit l'origine des phases.

Pour plus de simplicité dans les calculs il est impératif d'utiliser la notation complexe :

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad ; \quad I(t) = I_0 e^{j(\omega t - \phi)} \quad (4.22)$$

de sorte que dériver revient à multiplier par $j\omega$ et intégrer diviser par $j\omega$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = j\omega V_0 e^{j\omega t} = j\omega V(t) \quad ; \quad \int V(t) dt = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{V(t)}{j\omega} \quad (4.23)$$

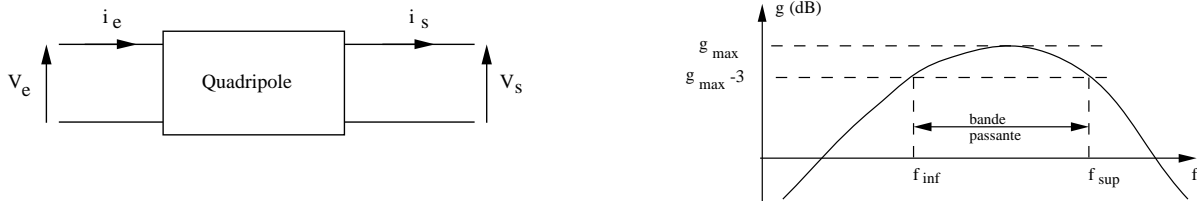


FIG. 4.13 – Schéma et diagramme de Bode d'un quadripôle.

4.3.2 Impédance complexe

On peut généraliser la loi d'Ohm aux dipôles linéaires en régime sinusoïdale en utilisant la notion d'impédance complexe Z telle que $V = ZI$. Appliquons cette relation aux trois dipôles les plus courants :

- Résistance : $V = RI \Rightarrow Z_R = R$
- Condensateur : D'après (4.12) on a :

$$V(t) = \frac{1}{C} \int Idt \Rightarrow V(t) = \frac{1}{jC\omega} I(t) \Rightarrow Z_C = \frac{1}{jC\omega} \quad (4.24)$$

- Bobine : D'après (4.17) on a :

$$V(t) = \frac{LdI(t)}{dt} = jL\omega I \Rightarrow Z_L = jL\omega \quad (4.25)$$

On remarque que l'impédance d'une résistance est réelle et constante, égale à R tandis que les impédances des bobines et condensateurs sont imaginaires et fonction de la pulsation ω .

4.4 Quadripôles

4.4.1 Fonction de transfert

Amplificateurs et filtres sont, d'une manière générale, des quadripôles caractérisés par leur fonction de transfert $\mathcal{H}(\omega)$ définie comme le rapport entre les tensions complexes d'entrée et de sortie (figure 4.13).

Soit, en régime sinusoïdal :

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.26)$$

avec

$$G(\omega) = |\mathcal{H}(\omega)| = \frac{|V_s|}{|V_e|} \quad (4.27)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(V_s) - \arg(V_e) \quad (4.28)$$

$G(\omega)$ est le gain du quadripôle. On définit également le gain en decibel $g(\omega)$:

$$g(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |V_s| - 20 \log |V_e| \quad (4.29)$$

4.4.2 Diagramme de Bode

Les courbes $g(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ constituent le diagramme de Bode du quadripôle. A partir de ce diagramme, on peut définir la bande passante comme le domaine de fréquences (ou de pulsations) pour lequel on a $g > g_{max} - 3$ ou encore $G > G_{max}/\sqrt{2}$, où g_{max} et G_{max} sont les valeurs maximales des gains g et G . Les fréquences (ou pulsations) qui délimitent ce domaine sont appelées fréquences (ou pulsations) de coupures (figure 4.13).

4.4.3 Amplificateur de tension

Le schéma général d'un amplificateur de tension est donné figure 4.14. Il est caractérisé par son impédance d'entrée $Z_e = V_e/i_e$, son impédance de sortie Z_s et son gain en boucle ouverte A_0 (c'est à dire lorsqu'il n'est connecté à aucune charge). A_0 , Z_s et Z_e sont des grandeurs complexes dont le module et l'argument varient avec la fréquence.

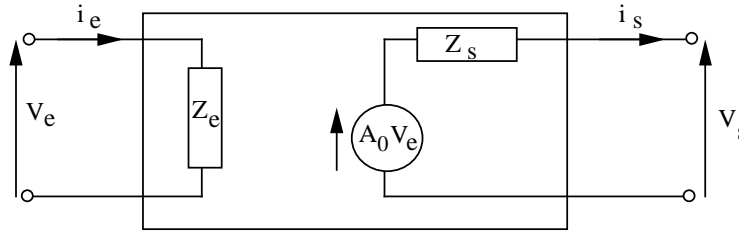


FIG. 4.14 – Schéma général d'un amplificateur de tension.

4.4.3.1 Adaptation en tension

Lorsqu'on le connecte à une impédance de charge Z_c on a $V'_s = Z_c i_s$ et $i_s = A_0 V_e / (Z_c + Z_s)$ d'où une amplification en tension :

$$\frac{V'_s}{V_e} = A_0 \frac{Z_c}{Z_c + Z_s} \quad (4.30)$$

L'amplification en tension dépend donc de l'impédance de charge, on peut remarquer qu'elle est réduite, pour une fréquence donnée, d'un facteur 2 par rapport à l'amplification à vide ($Z_c = \infty$) lorsque $Z_c = Z_s$.

Pour le cas d'un amplificateur HiFi la charge est un ensemble de haut parleurs dont l'impédance varie avec la fréquence, comme nous le verrons plus loin, avec une valeur minimale de l'ordre de $Z_{min} \approx 8\Omega$. Si on veut que le gain ne varie pas avec la fréquence à cause de cette variation de la charge il faut donc que l'impédance de sortie soit petite devant Z_{min} , c'est à dire égale à une fraction d'Ohm.

4.4.3.2 Mesure des impédances de sortie et d'entrée

En pratique, la mesure successive des tensions V_s (amplification à vide, $Z_c = \infty$) et V'_s (amplificateur chargé avec Z_c) permet de déterminer Z_s : la mesure à vide donne $V_s = A_0 V_e$; la mesure avec la charge Z_c donne $V'_s = A_0 V_e Z_c / (Z_c + Z_s)$

$$\Rightarrow Z_s = Z_c \left(\frac{V_s}{V'_s} - 1 \right) \quad (4.31)$$

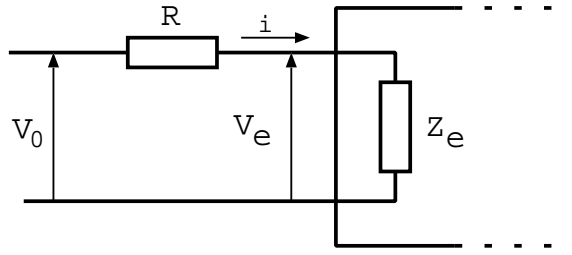
de même, la mesure des tensions $V_e = Z_e i$ et $V_0 = (Z_e + R)i$ du montage représenté figure 4.15 permet de déterminer Z_e :

$$Z_e = \frac{R V_e}{V_0 - V_e} \quad (4.32)$$

Remarque : ces mesures doivent être effectuées avec un oscilloscope d'impédance d'entrée très grande ($Z_{osc} \approx 1\text{ M}\Omega$) devant les impédances mesurées.

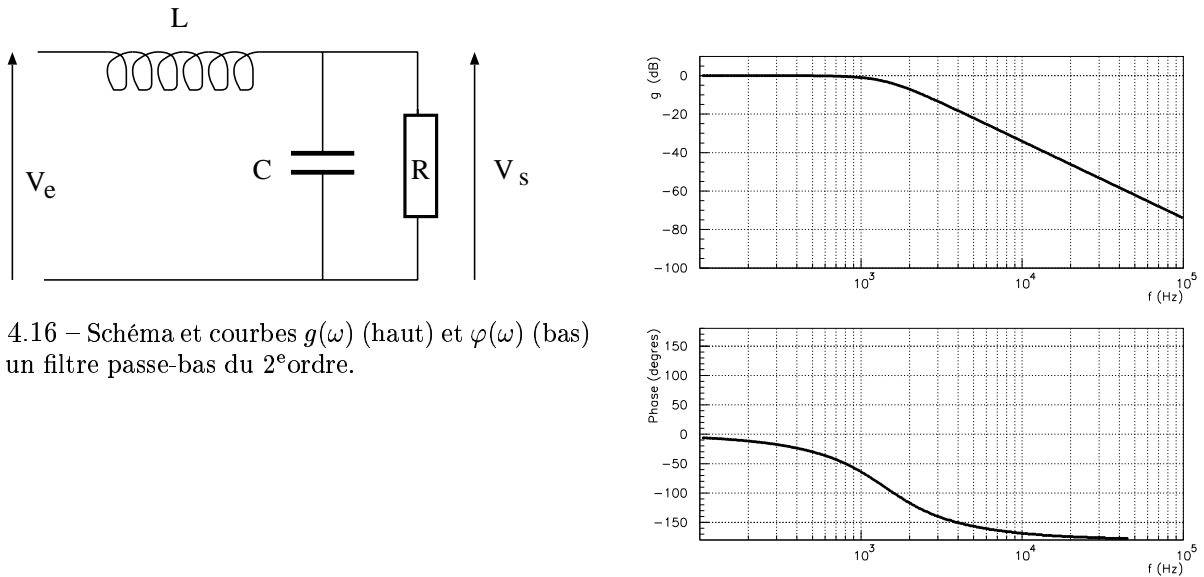
4.4.4 Filtres passifs

On appelle filtre passif un dispositif ne comportant pas de source de courant ou de tension et capable de ne laisser passer qu'une gamme de fréquence déterminée. Ces filtres peuvent être passe-haut, passe-bas ou passe bande et sont classés selon leur pente d'atténuation. Par exemple, un filtre passe-bas d'ordre n présente un gain qui décroît de $20 \times n$ décibels par décade au delà de la fréquence de coupure.


 FIG. 4.15 – Schéma de principe pour la mesure de Z_e .

4.4.4.1 Exemple 1 : filtre passe-bas du 2^e ordre

On obtient le filtre passe-bas du 2^e ordre le plus simple en combinant une capacité C et une inductance L , on étudiera ce filtre chargé par une simple résistance R (figure 4.16)


 FIG. 4.16 – Schéma et courbes $g(\omega)$ (haut) et $\varphi(\omega)$ (bas) pour un filtre passe-bas du 2^e ordre.

$$V_s = Z_{eq}i \quad (4.33)$$

$$V_e = (jL\omega + Z_{eq})i \quad (4.34)$$

avec $1/Z_{eq} = 1/R + jC\omega$, d'où :

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_{eq}}{jL\omega + Z_{eq}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}} \quad (4.35)$$

On calcule le gain G :

$$G = |\mathcal{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4}} \quad (4.36)$$

En prenant $L = 2R^2C$, on annule les termes en ω^2 sous la racine. En posant $\omega_0^2 = 1/LC$ on obtient le gain G :

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}} \quad (4.37)$$

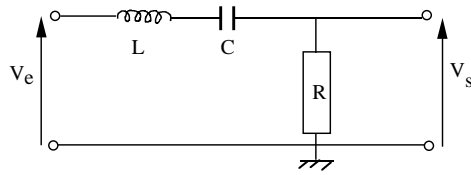
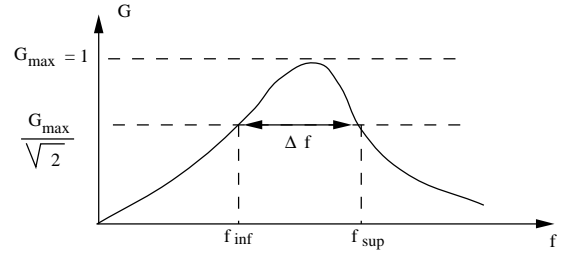


FIG. 4.17 – Courbe $G(\omega)$ pour un filtre passe-bande RLC .



Le gain en décibel est :

$$g = 20 \log G = -10 \log \left[1 + (\omega/\omega_0)^4 \right] \quad (4.38)$$

La courbe $g(\omega)$ est représentée figure 4.16. La fréquence de coupure est $f_0 = \omega_0/2\pi$ et la bande passante est comprise entre 0 et $f_0 = 1/2\pi RC$. On remarquera que g chute de 40 dB par décade (soit 12 dB par octave), qui est une propriété commune aux filtres du second ordre.

Pour obtenir un filtre passe haut du second ordre il suffit d'invertir la capacité avec l'inductance sur le schéma 4.16 .

4.4.4.2 Exemple 2 : filtres passe-bande

Nous n'étudierons, à titre d'exemple, que le filtre passe bande constitué par un circuit RLC (figure 4.17) :

$$V_s = RI \quad (4.39)$$

$$V_e = (R + jL\omega + 1/jC\omega)I \quad (4.40)$$

d'où :

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{R}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} \quad (4.41)$$

$G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ s'obtiennent à partir de \mathcal{H} :

$$G(\omega) = |\mathcal{H}(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(V_s) - \arg(V_e) = -\arctan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)$$

Le gain maximum $G_{max} = 1$ est obtenu pour la pulsation de résonance ω_0 telle que $LC\omega_0^2 = 1$

Ce filtre ne laisse passer que les pulsations autour de ω_0 . Les fréquences de coupure du filtre sont donnée par l'équation $G(\omega) = G_{max}/\sqrt{2}$ soit :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \quad (4.42)$$

d'où :

$$\omega_{sup} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (4.43)$$

$$\omega_{inf} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (4.44)$$

La largeur de la bande étant donnée par $\Delta\omega = \omega_{sup} - \omega_{inf} = R/L$. Pour ce type de filtre, on définit également le facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.45)$$

Ce facteur est d'autant plus grand que la bande passante est étroite (figure 4.17).

4.5 Les réponses non linéaires

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré que la réponse d'un quadripôle était linéaire, c'est à dire que la tension de sortie était proportionnelle à la tension d'entrée :

$$V_s(t) = kV_e(t) \quad (4.46)$$

Dans le cas d'un amplificateur k représente le gain. Il se peut cependant que V_s ne soit pas exactement proportionnelle à V_e de sorte que :

$$V_s(t) = k \left[V_e(t) + \epsilon V_e^2(t) \right] \quad \text{avec } \epsilon \ll 1 \quad (4.47)$$

Si $V_e(t)$ est une tension sinusoïdale $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$ alors :

$$V_s(t) = k \left[V_0 \cos \omega t + \epsilon V_0^2 \cos^2 \omega t \right] \quad (4.48)$$

soit, avec $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$:

$$V_s(t) = kV_0 \cos \omega t + k \left[\frac{\epsilon V_0^2}{2} + \frac{\epsilon V_0^2}{2} \cos 2\omega t \right] \quad (4.49)$$

On voit apparaître deux phénomènes : une tension continue en sortie et une tension sinusoïdale de fréquence double qui crée une "distorsion harmonique". On peut montrer facilement que des non linéarités d'ordres supérieurs en V_e^3 ou V_e^4 feraient apparaître des harmoniques de rang 3 ou 4.

Les non linéarités présentes dans chaque élément d'une chaîne HiFi (amplificateur et surtout haut-parleurs) ont donc pour effet de changer le timbre des sons en introduisant des harmoniques non présents dans le son initial.

4.6 Le haut-parleur électrodynamique

4.6.1 Principe de fonctionnement

On appelle haut-parleur tout système capable de transformer un signal électrique en une onde sonore. Cette transformation peut s'effectuer en utilisant différents principes physiques dont le plus couramment utilisé est le principe électrodynamique. Les différentes parties constituant un haut-parleur électrodynamique sont représentées sur la vue en coupe de la figure 4.18.

Une bobine mobile constituée de N spires parcourues par un courant i est placée dans l'entrefer d'un aimant permanent produisant un champ \vec{B} à symétrie radiale (figure 4.19a).

Tout élément de longueur $d\vec{\ell}$ du conducteur est orthogonal au champ \vec{B} et subit une force de Laplace $d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ de module $df = id\ell B$. Le module de la force totale F sur la bobine est donc égale à $F = i\ell B$ ou ℓ est la longueur totale du bobinage.

Sous l'action de cette force, la bobine se déplace avec la vitesse \vec{v} , il y a donc apparition dans le conducteur d'un champ électromoteur $\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où une force électromotrice $e = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Blv$ (figure 4.19b).

Conformément à la loi de Lenz, cette force électromotrice s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

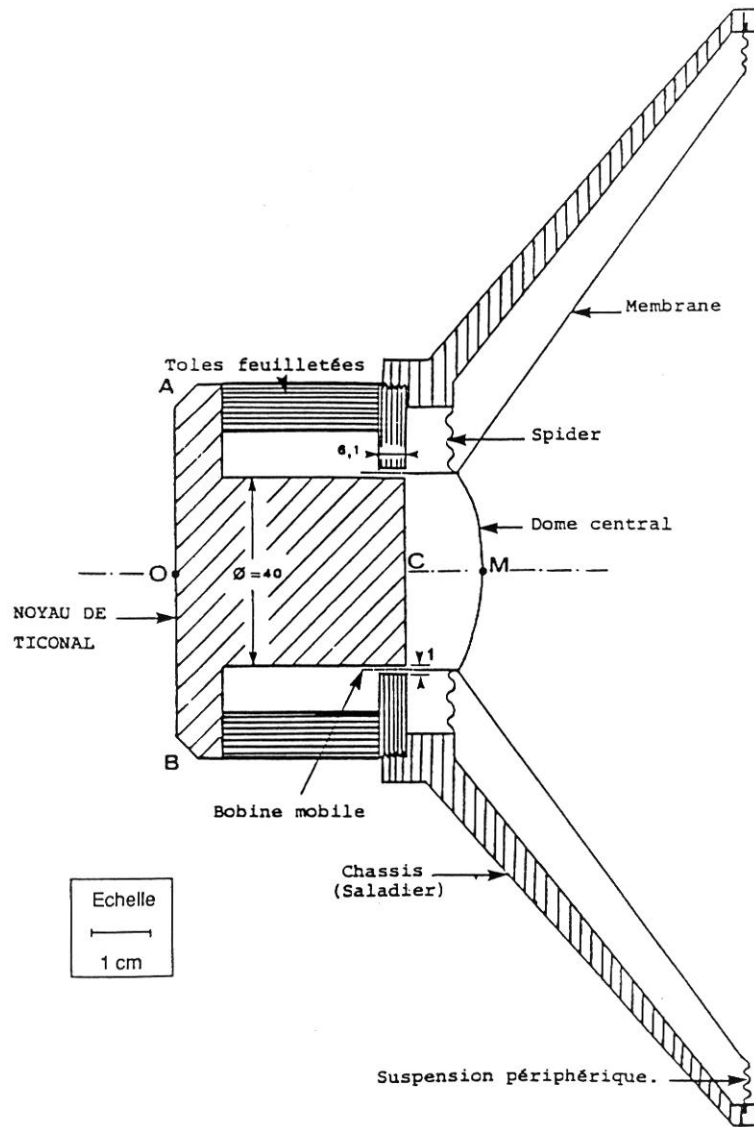


FIG. 4.18 – Vue en coupe d'un haut-parleur électrodynamique.

L'équation du circuit électrique constitué par la bobine de coefficient d'auto-inductance L et de résistance R alimenté par un générateur délivrant une tension $U(t)$ est donc (figure 4.20) :

$$U(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + Blv(t) \quad (4.50)$$

En régime sinusoïdale $U(t) = U_0 \exp(j\omega t)$ et $i(t) = i_0 \exp(j\omega t + \varphi)$

Si on introduit l'impédance électrique complexe $Z_e = R + jL\omega$, l'équation 4.50 peut alors s'écrire :

$$U(t) = Z_e i(t) + Blv(t) \quad (4.51)$$

Supposons que l'équipage mobile, de masse m , constitué par la membrane et la bobine se déplace selon l'axe Ox sous l'action de la force de laplace $F = ilB$, d'une force de rappel $-kx$ due à l'élasticité du système de suspension et d'une force de frottement $-\alpha v$. Son équation mécanique est alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = ilB - kx - \alpha \frac{dx}{dt} \quad (4.52)$$

Soit en fonction de la vitesse v :

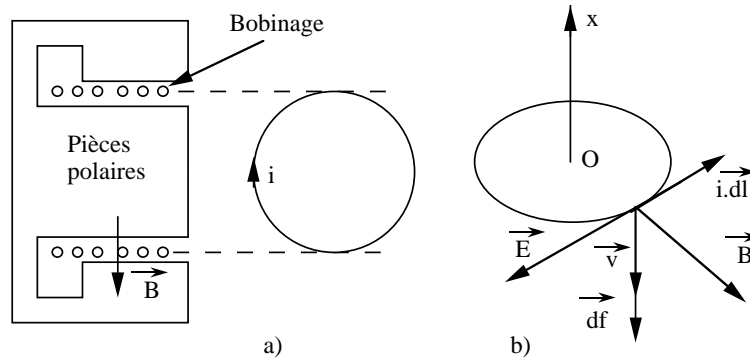


FIG. 4.19 – a) Schéma d'une bobine mobile placée dans l'entrefer d'un aimant permanent produisant un champ magnétique à symétrie radiale. b) Schéma des vecteurs champs (\vec{E} , \vec{B}) et de la force df s'exerçant sur un élément de spire de la bobine du haut-parleur.

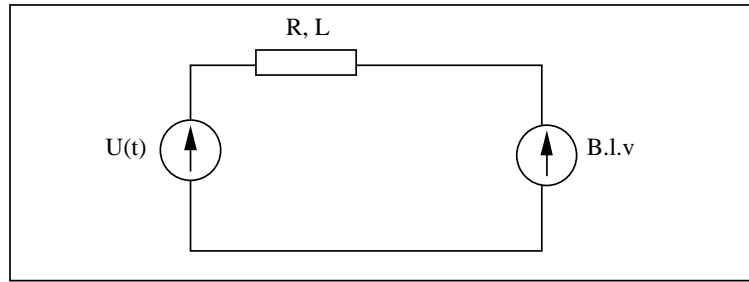


FIG. 4.20 – Schéma du circuit électrique équivalent au haut-parleur.

$$i\ell B = m \frac{dv}{dt} + k \int v dt + \alpha v \quad (4.53)$$

Si la tension excitatrice est sinusoïdale, la vitesse $v(t)$ en régime permanent le sera aussi : $v(t) = v_0 \exp(j\omega t + \phi)$. Si on introduit l'impédance mécanique Z_m , l'équation 4.53 peut s'écrire de manière analogue à l'équation électrique (voir tableau 4.1 pour un rappel des analogies électro-mécaniques) :

$$i\ell B = Z_m v \quad ; \quad Z_m = \alpha + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \quad (4.54)$$

On a donc affaire à un système d'équations couplées :

$$U(t) = Z_e i(t) + B\ell v(t) \quad (4.55)$$

$$B\ell i(t) = Z_m v(t) \quad (4.56)$$

On peut maintenant exprimer $U(t)$ en fonction de $i(t)$:

$$U(t) = Z_e i(t) + \frac{B^2 \ell^2}{Z_m} i(t) = Z_e^* i(t) \quad (4.57)$$

Z_e^* est la somme de l'impédance électrique Z_e du système au repos et de l'impédance motionnelle $B^2 \ell^2 / Z_m$. Cette impédance électrique totale peut s'exprimer en fonction des différentes constantes électro-mécaniques du haut-parleur sous la forme :

$$Z_e^* = R + jL\omega + \frac{B^2 \ell^2}{\alpha + j(m\omega - k/\omega)} \quad (4.58)$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (fréquence de résonance mécanique), $\beta = B^2 \ell^2 / m$ et $\gamma = \alpha / m$, cette impédance peut s'écrire :

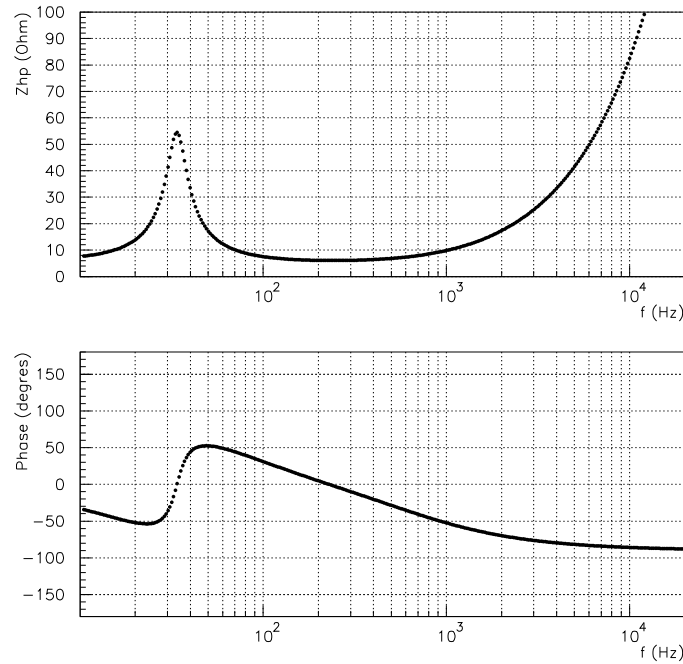


FIG. 4.21 – Courbes typiques du module et de la phase de l'impédance d'un haut-parleur en fonction de la fréquence.

$$Z_e^* = R + \frac{\beta\gamma\omega^2}{\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} + j\omega \left(\beta \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} + L \right) \quad (4.59)$$

4.6.2 Détermination expérimentale des constantes électro-mécaniques du haut-parleur

4.6.3 Courbe d'impédance

Le tracé de la courbe du module de l'impédance Z_e^* en fonction de la fréquence (figure 4.21) peut s'obtenir expérimentalement par le rapport entre la tension aux bornes du HP et le courant débité par l'amplificateur. On peut, à partir de cette courbe, déterminer la plupart des constantes électro-mécaniques du haut-parleur.

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $|Z_e^*| \rightarrow R$, la résistance électrique R du bobinage peut donc être déterminée en prenant la limite de la courbe à basse fréquence. On peut également mesurer directement R avec un ohmmètre.
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $|Z_e^*|$ se comporte asymptotiquement comme $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$. L'inductance L peut donc être déterminée à partir d'une mesure à une fréquence élevée f_C :

$$L = \frac{\sqrt{|Z_e^*|_{f=f_C}^2 - R^2}}{2\pi f_C} \quad (4.60)$$

- Le rapport k/m s'obtient directement à partir de la fréquence de résonance mécanique f_0 du système :

$$\frac{k}{m} = (2\pi f_0)^2 \quad (4.61)$$

Grandeurs électriques	Définition	Grandeurs mécaniques	Définition
d.d.p. (Volt)	$u(t) = U_0 \cos(\omega t)$	Force (N)	$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$
Intensité (Ampère)	$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$	vitesse (m/s)	$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$
Charge (Coulomb)	$q(t) = \int i dt$	déplacement (m)	$x(t) = \int v dt$
Résistance (Ohm)	R	Coef. de frottement (kg/s)	α
Inductance (Henry)	L	masse (kg)	m
Capacité (Farad)	C	Compliance méca. (m/N)	$C_m = 1/k$ (inverse de la raideur)
Impédance d'un circuit RLC	$Z = R + j(l\omega - 1/C\omega)$	Impédance mécanique d'un oscillateur amorti	$Z_m = \alpha + j(m\omega - k/\omega)$
Loi d'Ohm	$u = Zi$		$F = Z_m v$
Puissance dissipée	$\langle P_{elec} \rangle = RI_0^2/2 = U_0^2/2R$	Puissance dissipée	$\langle P_{meca} \rangle = \alpha V_0^2/2 = F_0^2/2\alpha$

TAB. 4.1 – Analogies électro-mécaniques en régime sinusoïdal.

- A la résonance mécanique on a : $|Z_e^*|_{\omega=\omega_0} = \sqrt{(R + \beta/\gamma)^2 + L^2\omega_0^2}$
On en déduit le coefficient γ en résolvant l'équation du second degré obtenue en élevant au carré la relation précédente :

$$\gamma = \beta \frac{R + \sqrt{|Z_e^*|_{\omega=\omega_0}^2 - L^2\omega_0^2}}{|Z_e^*|_{\omega=\omega_0}^2 - L^2\omega_0^2 - R} \quad (4.62)$$

Si on néglige le terme $L\omega$ à basse fréquence cette expression se simplifie sous la forme :

$$\gamma \approx \frac{\beta}{|Z_e^*|_{\omega=\omega_0} - R} \quad (4.63)$$

4.6.4 Masse de l'équipage mobile

Une méthode simple pour obtenir la masse m de l'équipage mobile consiste à poser sur le dôme une masse additionnelle M à mesurer la nouvelle fréquence de résonance mécanique. Si l'on admet, en première approximation, que le rapport des fréquences propres est égale à celui des fréquences de résonance on aura :

$$\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2 = \frac{\frac{k}{m+M}}{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{M}{\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 - 1} \quad (4.64)$$

4.6.5 Coefficient de couplage $B\ell$

Le coefficient $B\ell$ peut être déterminé en utilisant une balance électromagnétique (voir notice de la balance électromagnétique). Il s'agit de compenser la force de Laplace Bli par un poids $P = Mg$. La pente de la droite $P = f(i)$ donne le coefficient $B\ell$.

4.7 Exercices

1. Quadripôles

- (a) Déterminer le gain et la bande passante d'un filtre passe-bas de type LR et d'un filtre passe-haut de type CR .
- (b) On connecte un filtre passe-bas de type RC à une résistance de charge R_c déterminer le gain de l'ensemble et le comparer à celui du filtre à vide. Conclusion.

2. Haut parleur électrodynamique

- (a) Montrer que la puissance instantanée d'une force \vec{F} dont le point d'application se déplace avec une vitesse \vec{v} est $P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$
- (b) Calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ lorsque la force est de la forme $\vec{F} = F_m \cos \omega t \vec{u}_x$ et la vitesse $\vec{v} = v_m \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x$
- (c) En déduire, pour le cas d'un haut-parleur la puissance moyenne de la force de Laplace $\vec{F} = i\ell B \vec{u}_x$ qui met en mouvement la bobine selon la direction Ox lorsque le courant i est de la forme $i = I_m \cos \omega t$
- (d) Montrer que cette puissance est maximale pour une fréquence que l'on calculera, ainsi que la puissance moyenne maximale P_{max}
Application numérique : $I_m = 2 \text{ A}$; $m = 31.3 \text{ g}$; $k = 1112 \text{ N.m}^{-1}$; $B = 1.26 \text{ T}$; $\ell = 9 \text{ m}$; $\alpha = 2.8 \text{ N.s.m}^{-1}$.

Chapitre 5

NOTIONS D'ACOUSTIQUE DES SALLES

5.1 Introduction

Nous n'aborderons ici que quelques notions de bases sur l'acoustique des salles qui, dans le cadre plus général de l'acoustique architecturale traite des problèmes acoustiques posés par l'art du bâtiment : protections contre les bruits et les vibrations, conditions d'émission et de réception des ondes sonores dans un local...

5.2 Propagation du son en champ libre

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'amplitude des ondes sphériques émises par une source sonore ponctuelle isotrope décroît comme $1/r$, où r est la distance à la source. C'est la **propagation en champ libre**, en l'absence de tout obstacle pouvant réfléchir les ondes. Dans ce cas la pression acoustique décroît d'un facteur 2 chaque fois que l'on double la distance r et le niveau d'intensité acoustique correspondant décroît donc de 6 dB :

$$L_{dB}(2r) = 20 \log \left(\frac{p(2r)}{p_0} \right) = 20 \log \left(\frac{p(r)}{2p_0} \right) = 20 \log \left(\frac{p(r)}{p_0} \right) - 20 \log 2 = L_{dB}(r) - 6 \quad (5.1)$$

Les conditions de propagation en champ libre sont rarement remplies lorsque le son se propage dans une salle, à l'exception des salles anéchoïques utilisés dans les laboratoires d'acoustique et dont les parois sont recouvertes de matériaux parfaitement absorbants empêchant toute réflexion.

5.3 Propagation du son dans une salle

Dans une salle, le son ne parcourt que de faibles distances avant de rencontrer des obstacles (murs, meubles, auditeurs...). C'est la façon dont les ondes sonores sont réfléchies par ces obstacles selon leur nature, leur forme ou leur état de surface qui détermine les propriétés acoustiques de la salle. La figure 5.1 montre des exemples de réflexions d'ondes sonores par des surfaces planes, concaves, convexes, ou irrégulières.

Considérons un auditeur A placé dans une salle à une distance D d'une source S (figure 5.2). Lorsque la source émet une impulsion sonore, l'auditeur percevra d'abord le son direct au bout d'un temps $t_0 = D/c$ puis de nombreuses réflexions successives au bout de temps $t_1, t_2...$ (figure 5.3). Les intensités des ondes réfléchies deviennent de plus en plus faibles car les temps les plus longs correspondent à des réflexions multiples de plus en plus nombreuses et donc à des atténuations de plus en plus fortes. Toutes ces ondes réfléchies se fondent pour former un son continu d'intensité décroissante que l'on désigne par **réverbération**.

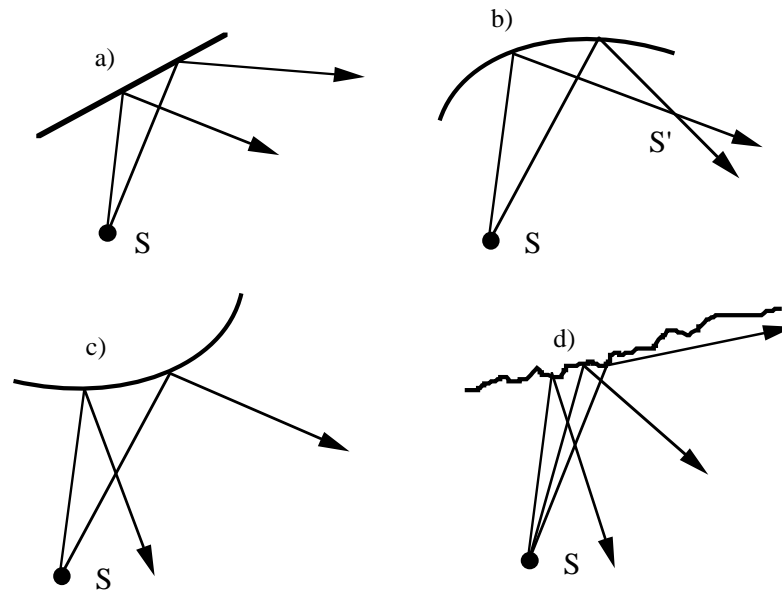


FIG. 5.1 – réflexion d’ondes sonores par une surfaces plane, qui agit comme un miroir a) ; concave, qui concentre les ondes issues de S en S' b) ; convexes, qui disperse les ondes c) ; ou irrégulière, qui produit une réflexion diffuse dans toutes les directions de l’espace d).

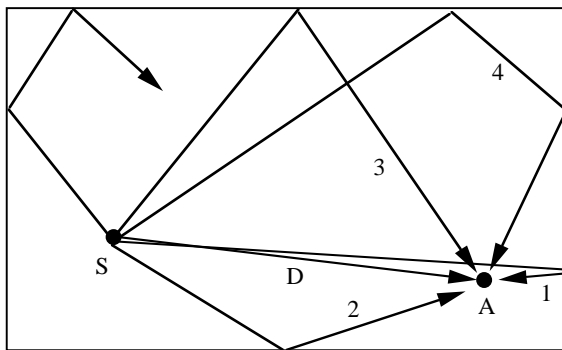


FIG. 5.2 – Trajectoires des sons direct (D) et réfléchis (1, 2, 3...) entre la source (S) et l’auditeur (A).

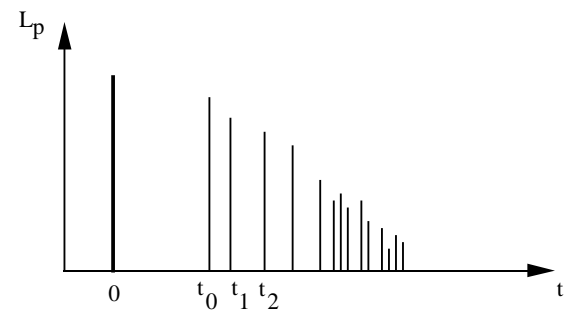


FIG. 5.3 – Temps d’arrivées et amplitudes des sons direct et réfléchis provenant d’une impulsion émise par la source à $t = 0$.

5.4 Le temps de réverbération

Supposons que la salle représentée figure 5.2 ait une longueur caractéristique $L = 10$ m et que la source et l’auditeur soient placés au voisinage de son centre, séparés d’une distance de 3 m. Le son direct arrivera au bout de $t_0 = D/c \approx 10$ ms tandis que la première réflexion arrivera au bout de $t_0 = L/c \approx 30$ ms, soit environ 20 ms plus tard, immédiatement suivie des réflexions numéro 2, 3, etc... Dans une telle salle, les sons réfléchis arrivant au bout d’une seconde ont donc subi une trentaine de réflexions.

En fait les ondes réfléchies qui atteignent l’auditeur dans un intervalle de temps inférieur à 35 ms par rapport au son direct ne sont pas séparées de ce dernier par l’oreille. Ces premières réflexions ont donc pour effet de renforcer le son direct, c’est l’aspect positif de la réverbération (il faut toutefois que les réflexions ne modifient pas trop la composition spectrale ni l’enveloppe des sons).

Cependant si les sons réverbérés persistent trop longtemps ils ont pour effet d’altérer la clarté du son. En particulier les sons réfléchis arrivant après des temps très supérieurs à 35 ms par rapport au son direct d’une première impulsion sonore seront perçus comme des échos se superposant aux impulsions sonores suivantes.

Si on remplace l'impulsion sonore de la figure 5.3 par un son stationnaire que l'on établit à l'instant t_0 , au son direct s'ajoutent les différentes réflexions jusqu'à ce qu'un niveau d'équilibre soit atteint. Réciproquement, si l'on coupe la source à l'instant $t_0 + \Delta T$ le son décroît avec une constante de temps T_R appelée **temps de réverbération** défini comme le temps requis pour que le niveau sonore diminue d'un facteur 10^6 , soit encore de 60 dB. La courbe de croissance et décroissance du son à l'allure donnée par la figure 5.4.

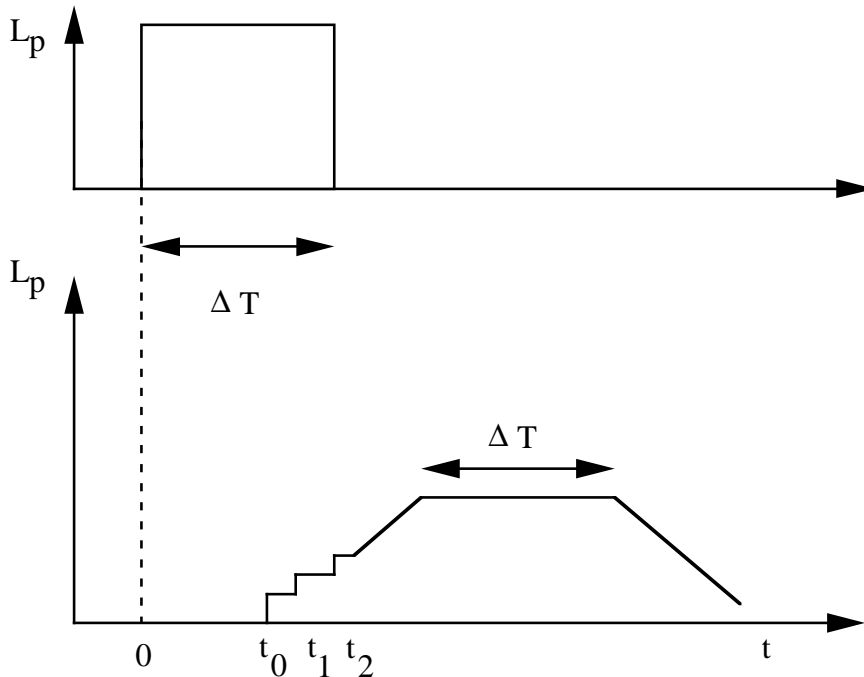


FIG. 5.4 – Croissance et décroissance du son dues à la réverbération.

Bien que le comportement de la réverbération soit trop compliqué pour se résumer en une seule constante, le temps de réverbération pour des fréquences "medium" (habituellement 500 Hz) donne une bonne indication de la qualité acoustique d'un auditorium ou d'une salle de concert. Les courbes de la figure 5.5 donnent les temps de réverbérations souhaités pour une salle selon son volume et sa fonction.

5.5 La formule de Sabine

En principe, le temps de réverbération peut être estimé en calculant le taux de décroissance de l'énergie sonore stockée dans la salle au moment où on coupe la source. Ce taux dépend de la surface des matériaux absorbants présents et de leurs coefficients d'absorption. Plus ces coefficients sont élevés plus le son est atténué rapidement.

En un temps Δt une onde sonore parcourt une distance $c\Delta t$ et subit en moyenne N réflexions, le trajet moyen entre deux réflexions, ou libre parcours moyen, est donc $l_m = c\Delta t/N = c/n$ où n est le nombre moyen de réflexions par unité de temps. On peut montrer que ce libre parcours moyen ne dépend pas de la forme de la salle, de volume V et de surface S , et peut s'exprimer sous la forme : $l_m = 4V/S$.

Le nombre moyen de réflexions par unité de temps peut donc s'écrire :

$$n = \frac{c}{l_m} = \frac{cS}{4V} \quad (5.2)$$

On considère une source sonore isotrope émettant un son stationnaire de sorte qu'à l'instant t l'énergie sonore $E(t)$ soit répartie de façon uniforme dans la salle. Si on coupe cette source, à chaque réflexion l'énergie sonore diminue en moyenne de $VE\alpha$, où α est le coefficient d'absorption moyen des surfaces. La perte d'énergie par unité de temps est donc :

FIG. 5.5 – Temps de réverbérations souhaités pour une salle selon son volume et sa fonction.

$$\frac{dE}{dt} = -nVE\alpha = -\frac{cE\alpha S}{4} \Rightarrow \frac{dE}{E} = -\frac{c\alpha S}{4V}dt \quad (5.3)$$

Cette équation différentielle à pour solution :

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{c\alpha S}{4V}t\right) \quad (5.4)$$

D'après la définition du temps de réverbération :

$$E(T_R) = \frac{E_0}{10^6} \Rightarrow T_R = 6 \ln 10 \frac{4V}{c\alpha S} = 0.161 \frac{V}{\alpha S} \quad (5.5)$$

C'est la formule de Sabine.

Le coefficient d'absorption moyen α peut s'exprimer à partir des coefficients α_i de chaque surface S_i formant la surface totale S de la salle, sous la forme :

$$\alpha = \sum_i \frac{\alpha_i S_i}{S} \quad (5.6)$$

La formule de Sabine, fondée sur des considérations statistiques, n'est valable que s'il y a un grand nombre de réflexions, c'est à dire si $\alpha \ll 1$. On voit par exemple que pour $\alpha = 1$ (absorption totale dès la première réflexion) on doit avoir $T_R = 0$ alors que la formule de Sabine donne $T_R = 0.161V/S$. D'autre part, pour les salles très grandes, un terme correctif tenant compte de l'absorption par l'air doit être ajouté.

Du fait que les coefficients α_i dépendent de la fréquence, le temps T_R en dépend aussi.

Annexe A

Rappels sur les calculs d'incertitudes

A.1 Définitions

A.1.1 Incertitude relative et absolue

A toute mesure physique doit être associée une estimation quantitative des incertitudes de mesure commises. Ces incertitudes peuvent être absolues ou relative :

- L'incertitude absolue est par convention une grandeur positive qui a la même dimension que la grandeur mesurée :

(Mesure idéale) = (mesure effectuée) \pm (incertitude absolue)

exemple : $V = 3.18 \pm 0.02$ Volts

- L'incertitude relative est aussi une grandeur positive mais sans dimension de par sa définition. On peut l'exprimer en % :

incertitude relative = (incertitude absolue) / (|mesure effectuée|)

exemple : $V = 3.18$ Volts $\pm 0.6\%$

On peut distinguer trois sources principales d'incertitude associée à une mesure expérimentale :

A.1.2 Incertitude liée à l'instrument

La valeur donnée par un instrument de mesure a une précision limitée, celle-ci est en générale inscrite sur l'instrument lui même ou dans sa notice d'utilisation.

exemple : Si on mesure une tension avec un multimètre digital la notice précise que pour toute mesure x on a $\Delta x = n\% \times x + k \times \text{rang du dernier digit affiché}$,

soit, si $x = V = 4.681$ V, $k = 3$ et $n = 0.5\%$ on a

$$\Delta V = 5 \times 10^{-3} \times 4.681 + 3 \times 0.001 = 0.026V. \quad (\text{A.1})$$

ce qui représente une incertitude relative

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0.026}{4.681} = 0.0056 \approx 0.6\% \quad (\text{A.2})$$

A.1.3 Incertitude liée à la lecture

Cette incertitude doit être évaluée par l'expérimentateur et s'ajoute à l'incertitude de l'instrument.

Dans le cas des instruments à affichage numérique elle peut être prise égale à zéro, sauf si par exemple l'affichage oscille entre deux valeurs.

exemple : Si on mesure une tension avec un oscilloscope analogique, on doit compter un nombre de graduations sur l'écran et, selon les cas, (trace plus ou moins bien focalisée, fluctuation due au bruit électronique, acuité visuelle de l'expérimentateur) ce nombre peut être estimé à ± 1 ou $1/2$ graduation.

A.1.4 Incertitude liée à la mesure

Cette incertitude, qui doit également être évaluée par l'expérimentateur, regroupe toute les sources d'erreur liées au principe même de l'expérience cette incertitude est en générale difficile à évaluer correctement. On peut avoir une idée de cette incertitude en recommençant la même mesure plusieurs fois en ne changeant rien au dispositif : si les résultats sont très dispersés c'est le signe que l'expérience n'est pas très reproductible à causes de paramètres mal maîtrisés. Sinon, si les résultats x_i sont regroupés autour d'une valeur moyenne x_m on peut garder la valeur x_m avec comme incertitude associée à cette mesure la variance de la distribution des x_i

A.1.5 Incertitude totale

L'incertitude totale est la somme de toutes les incertitudes qui peuvent se cumuler :

$$\Delta x_{exp} = \Delta x_{instr} + \Delta x_{lect} + \Delta x_{mes} \quad (\text{A.3})$$

Il est possible qu'une des ces contributions soit négligeable devant les autres, dans ce cas on ne la prend pas en considération.

A.2 Propagation par une formule

A.2.1 Incertitude sur une grandeur fonction d'une autre

Après avoir déterminé l'incertitude absolue Δx associée à la quantité mesurée x , on cherche à déterminer l'incertitude absolue Δy associée à la quantité y qui dépend de x selon une loi $y = f(x)$ comme le montre la figure A.1.

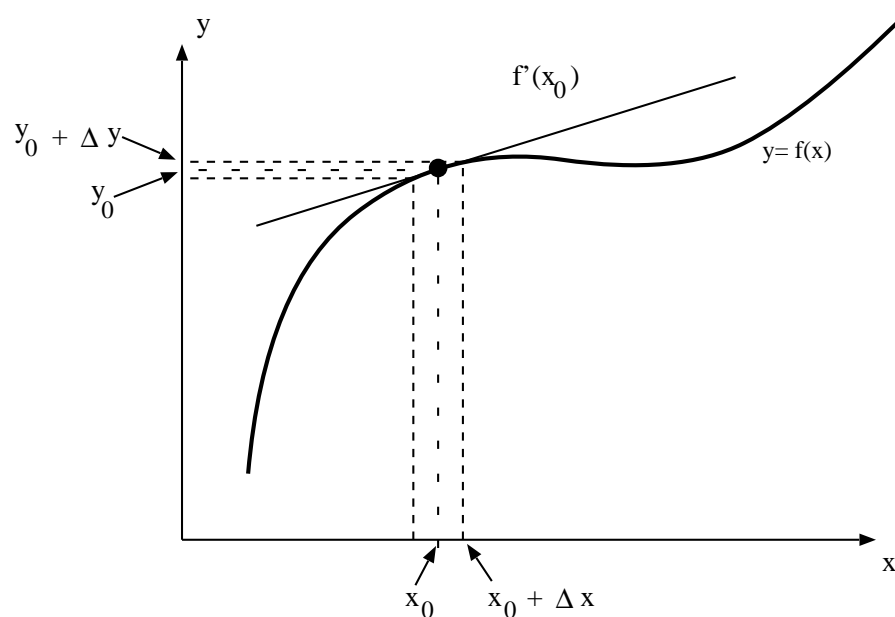


FIG. A.1 – Approximation de l'incertitude sur la fonction $y = f(x)$.

Soit x_0 une mesure de x avec l'erreur absolue Δx , on peut, pour avoir une approximation de Δy , développer $y = f(x)$ autour de la valeur x_0 :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} + \dots = \\ \Rightarrow \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |f'(x_0)| \Delta x + \dots \end{aligned}$$

On voit donc que l'erreur commise sur y est proportionnelle la dérivée de la fonction $y = f(x)$ en x_0 : si y dépend fortement de x (dérivée importante) alors une petite erreur sur x induit une grande erreur sur y .

Δy étant positive on prend la valeur absolue de $f'(x_0)$ ce qui se justifie aisément : que $f(x)$ soit décroissante ou croissante avec la même pente l'erreur sur y sera la même.

A.2.2 Incertitude sur une grandeur fonction de plusieurs autres

Si une grandeur y dépend de plusieurs variables : $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ mesurées de façon indépendante avec des incertitudes valant respectivement $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$ l'incertitude sur y sera la somme des contributions de chaque Δx_i obtenue en prenant la dérivée partielle de f par rapport à x_i . Là encore, il faut prendre la valeur absolue de chacune de ces dérivées partielles, il en résultera une majoration de l'incertitude absolue correspondant au cas extrême où toutes les incertitudes Δx_i contribueraient à faire dévier y dans le même sens.

$$\Delta y \leq \Delta x_1 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{10}} + \Delta x_2 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{20}} + \Delta x_3 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{30}} + \dots \quad (\text{A.4})$$

A.2.3 Quelques exemples simples

A.2.3.1 Somme ou différence de deux mesures

Si $y = f(x, z) = x \pm z$ alors, chaque dérivée partielle étant égale à ± 1 , on a :

$$y = x \pm z \Rightarrow \Delta y \leq \Delta x + \Delta z \quad (\text{A.5})$$

L'incertitude absolue sur la somme ou différence de deux mesures est inférieure ou égale à la somme des incertitudes absolues sur ces deux mesures.

A.2.3.2 Produit de deux mesures

Si $y = f(x, z) = xz$ alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z ; \frac{\partial f}{\partial z} = x \Rightarrow \Delta y \leq |x|\Delta z + |z|\Delta x \quad (\text{A.6})$$

Soit, en divisant par y pour avoir l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta y}{y} \leq \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta z}{z} \right| \quad (\text{A.7})$$

On notera qu'il en serait de même pour le quotient de deux mesures, à cause de la valeur absolue :

L'incertitude relative sur le produit ou le quotient de deux mesures est inférieure ou égale à la somme des incertitudes relatives sur ces deux mesures.

A.2.4 Dérivation logarithmique

En remarquant que $d \ln y = dy/y$ on voit que l'on peut directement calculer l'incertitude relative sur une fonction f de produits ou de quotients en calculant la dérivée logarithmique $d \ln(f)$ comme par exemple :

$$\begin{aligned} y &= f(x, z, t) = \frac{4x^2 \sin(t)}{z} \\ \ln y &= 8 \ln x + \ln(\sin(t)) - \ln z \\ d \ln y &= \frac{dy}{y} = 8 \frac{dx}{x} + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt - \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{y} \leq 8 \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta t}{|\tan(t)|} + \frac{\Delta z}{|z|}$$

Bien entendu, cette technique ne s'applique pas aux sommes et aux différences, d'autre part, lorsque une même variable apparaît plusieurs fois il faut penser à regrouper les contributions qui lui sont liées et qui peuvent en partie se compenser (lorsque cette variable est à la fois au numérateur et au dénominateur d'une fonction), comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} y &= f(x, z, t) = \frac{x-t}{z-t} \\ \rightarrow \ln y &= \ln(x-t) - \ln(z-t) \\ \rightarrow d \ln y &= \frac{dy}{y} = \frac{d(x-t)}{x-t} - \frac{d(z-t)}{z-t} = \frac{dx}{x-t} - \frac{dt}{x-t} - \frac{dz}{z-t} + \frac{dz}{z-t} \\ \rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x-t} - \frac{dz}{z-t} + \left(\frac{1}{z-t} - \frac{1}{x-t} \right) dt \\ \rightarrow \frac{\Delta y}{|y|} &\leq \frac{\Delta x}{|x-t|} + \frac{\Delta z}{|z-t|} + \left| \frac{1}{z-t} - \frac{1}{x-t} \right| \Delta t \end{aligned}$$